

Vegyünk fel egy derékszögű koordináta-rendszert úgy, hogy k középpontja legyen az O origó, az x tengely essen egybe e -vel, az egység pedig legyen k sugara. Ebben a koordináta-rendszerben fogjuk megadni a feltételeknek eleget tevő középpontok halmazának egyenletét.

Elegendő az $y \geq 0$ félsík pontjaival foglalkoznunk, mert a megfelelő pontok halmaza is szimmetrikus lesz az x tengelyre, hiszen k is és e is az. Legyen l egy, a feltételeknek eleget tevő kör, sugarának hossza legyen r , középpontja pedig a $L(x, y)$ pont. Két esetet különböztetünk meg.

i) Az L pont k -n kívül van (azaz $x^2 + y^2 > 1$). Ekkor l -nek k -hoz legközelebbi pontja az OL szakasz és k metszéspontja (1. ábra), tehát $OL = 2r + 1$. Mivel l érinti az x tengelyt, azért $r = y$. A Pitagorasz-tételt alkalmazva az ábrán látható OL átfogójú derékszögű háromszögre:

$$x^2 + y^2 = (2r + 1)^2.$$

Ebből, felhasználva, hogy $r = y$, kapjuk a

$$(1) \quad 9 \left(y + \frac{2}{3} \right)^2 - 3x^2 = 1$$

egyenletet. L tehát rajta van az (1) egyenletű hiperbolán. Ha ennek a hiperbolának egy olyan pontját vesszük – az 1. ábrán vastagabb vonallal jelölt rész –, amelyik k -n kívül, az $y \geq 0$ félsíkban van, akkor erre az $L'(x', y')$ pontra teljesül, hogy $\sqrt{x'^2 + y'^2} = 2y' + 1$, vagyis ha L' körül egy y' sugarú kört rajzolunk, akkor az érinti az x tengelyt, k -hoz legközelebbi pontja pedig k -tól $(2y' + 1) - 1 - y' = y'$ távolságra van, vagyis eleget tesz a feladat feltételeinek.

ii) Ha az L pont k -n belül van (azaz $x^2 + y^2 < 1$), akkor l -nek k -hoz legközelebbi pontja az O -ból induló OL félegyenes és l metszéspontja (2. ábra). Ismét felírva Pitagorasz tételét:

$$x^2 + y^2 = (1 - 2r)^2.$$

Most is igaz, hogy $r = y$, ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$(2) \quad 9 \left(y - \frac{2}{3} \right)^2 - 3x^2 = 1.$$

L tehát rajta van a (2) egyenletű hiperbolán. Ugyanúgy, mint az előző esetben, most is belátható, hogy a hiperbola minden olyan pontja eleget tesz a feladat feltételeinek, amely k belsejében és az $y \geq 0$ félsíkban van – a 2. ábrán vastagabb vonallal jelölt rész.

A két esetben tehát hiperboladarabok és ezeknek az x tengelyre vonatkozó tükörképe a feltételeknek eleget tevő körközéppontok halmaza. Ez látható a 3. ábrán. Mivel az (1) és (2) egyenletű hiperbolák egymás tükörképei az x tengelyre, azért a keresett halmaz valójában a két hiperbola egy-egy ágából tevődik össze.

Kiss Gergely (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.)



