Mivel a p polinom folytonos függvény és $p(0) = 1 > 0$, azért $p(-1) \leq 0$ esetén a Bolzano-tétel szerint p felveszi a 0 értéket a $[-1,\ 0]$ intervallumon. De p-nek nincs valós gyöke, így $p(-1) = 1-a+b-c+1 > 0$, ahonnan $a+c < b+2 < 5$. Tehát $(a+c)^2 < 25$. A zárójelet felbontva és a $2ac \leq a^2+c^2$ összefüggést felhasználva kapjuk, hogy $ac < 6,25$. A $b < 3$ feltétel miatt így $abc < 18,75$. Ha tehát a, b, c 3-nál kisebb pozitív számok és p-nek nincs gyöke, akkor $abc < 18,75$.

Megmutatjuk azt is, hogy abc a $[0;\ 18,75)$ intervallumban minden értéket felvehet. Legyen $a = c = 2,5 - \varepsilon$ és $b = 3 - \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ha ε a $(0;\ 2,5)$ intervallumon mozog, akkor abc a Bolzano-tétel alapján minden értéket felvesz a $(0;\ 18,75)$ intervallumon.

Most már csak azt kell bizonyítani, hogy ekkor p-nek nincs valós gyöke. Tegyük fel az ellenkezőjét:

$$x^4 + (2,5-\varepsilon)x^3 + \left(3 - \frac{\varepsilon}{2}\right)x^2 + (2,5-\varepsilon) + 1 = 0.$$

Mivel $x \neq 0$, oszthatunk x^2-tel:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + (2,5-\varepsilon)\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(3 - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0.$$

Átalakítva:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + (2,5-\varepsilon)\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképlete szerint $x + \dfrac{1}{x}$ értékére

$$\frac{\varepsilon - 2,5 \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 3\varepsilon + 2,25}}{2}$$

adódik. A gyökjel alatt $(\varepsilon - 1,5)^2$ áll, tehát $x + \dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{2}$ vagy $x + \dfrac{1}{x} = \varepsilon - 2$.

Mindkét egyenletet megszorozva x-szel olyan egyenleteket kapunk, amelyeknek nincs valós gyöke. Tehát ellentmondásra jutottunk.

Szabadka Zoltán (Veszprém, Lovassy L. Gimn., 12. o.t.)