

Ha $x^2 - xy + \frac{p+1}{4}y^2$ osztható p -vel, akkor a 4-szerese is p -vel osztható:

$$p \mid 4x^2 - 4xy + (p+1)y^2 = (2x-y)^2 + py^2.$$

Így $2x-y$ is osztható p -vel, azaz van olyan r egész szám, amelyre

$$(1) \quad 2x-y = pr.$$

Legyen $v = r$ és $u = x - \frac{r(p-1)}{2}$ (p páratlan prím, ezért $\frac{p-1}{2}$ és így u is egész). Ekkor (1) figyelembevételével

$$p \left(u^2 - uv + \frac{p+1}{4}v^2 \right) = \frac{p}{4}(4u^2 - 4uv + (p+1)v^2) = \frac{p}{4}((2u-v)^2 + pv^2) = \frac{p}{4}((2x-rp)^2 + pr^2) = \frac{py^2}{4} + \frac{(2x-y)^2}{4} = x^2 - xy + \frac{p+1}{4}y^2$$

Fehér Lajos Károly (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 12. o.t.)