

$$A = 5^{12} + 2^{10} = 5^{12} + 2^{10} + 2 \cdot (5^6 \cdot 2^5) - 2 \cdot (5^6 \cdot 2^5) = (5^6 + 2^5)^2 - 5^6 \cdot 2^6 = (5^6 + 2^5 - 5^3 \cdot 2^3)(5^6 + 2^5 + 5^3 \cdot 2^3).$$

A szorzat második tényezője nyilván nagyobb 1-nél. Belátjuk, hogy $5^6 + 2^5 - 5^3 \cdot 2^3 > 1$.

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt ugyanis

$$5^6 + 2^5 \geq 2\sqrt{5^6 \cdot 2^5} = \sqrt{2} \cdot 5^3 \cdot 2^3,$$

így

$$5^6 + 2^5 - 5^3 \cdot 2^3 \geq 5^3 \cdot 2^3(\sqrt{2} - 1) > 1.$$

Tehát az A felírható két, 1-nél nagyobb egész szám szorzataként, azaz összetett szám.

Teljesen hasonló módon bizonyítható, hogy $a^{4k} + 2^{4m+2}$ mindig összetett szám, ha a , k és m pozitív egészek:

$$a^{4k} + 2^{4m+2} = (a^{2k} + 2^{2m+1} - a^k 2^{m+1})(a^{2k} + 2^{2m+1} + a^k 2^{m+1}).$$

Veres Péter (Székelyudvarhely, Tamási Á. Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzések. 1. Mivel a szorzat első tényezője 5-tel osztva 2 maradékot ad, így azonnal adódik, hogy nem lehet 1.

2. A feladatban a közismert $x^4 + 4y^4$ szorzattá alakítása van elrejtve.