

I. megoldás.

$$\begin{aligned}
2^{2k+3} + 3^{k+2} \cdot 7^k &= 8 \cdot 2^{2k} + 9 \cdot 3^k \cdot 7^k = 8 \cdot 4^k + (9 + 8)3^k \cdot 7^k - 8 \cdot 3^k \cdot 7^k = \\
&= 17 \cdot 21^k - 8 \cdot (21^k - 4^k).
\end{aligned}$$

A különbség első tagja osztható 17-tel, a második tagja pedig osztható a hatványalapok különbségével, $21 - 4 = 17$ -tel. Így az eredeti kifejezés is osztható 17-tel minden k természetes szám esetén.

II. megoldás. (Teljes indukcióval.) $k = 0$ -ra a kifejezés értéke 17. Legyen $k > 0$, és tegyük fel, hogy $2^{2k+3} + 3^{k+2} \cdot 7^k$ osztható 17-tel.

Ekkor

$$\underbrace{2^{2k+5}}_{4 \cdot 2^{2k+3}} + \underbrace{3^{k+3} \cdot 7^{k+1}}_{(3 \cdot 7) \cdot 3^{k+2} \cdot 7^k} = 4 \cdot (2^{2k+3} + 3^{k+2} \cdot 7^k) + 17 \cdot 3^{k+2} \cdot 7^k.$$

A zárójelben lévő tag az indukciós feltevés miatt osztható 17-tel, tehát $k + 1$ -re is teljesül az oszthatóság.

Így $2^{2k+3} + 3^{k+2} \cdot 7^k$ minden $k \in \mathbf{N}$ esetén osztható 17-tel.

Kovács 625 Erika (Budapest, Árpád Gimn., 9. o.t.) dolgozata alapján