

Állítsunk a gömb O_1 középpontján keresztül a vízszintes síkra merőleges síkot. Ez a sík a hengert egy körben metszi, amelynek a középpontját jelöljük O_2 -vel, sugarát R -rel. O_2 -ből a vízszintes síkra állított merőleges talppontja T , a két kör közös érintési pontja E , a közös érintő a vízszintes síkot az M pontban metszi.

Az $O_1O_2T \triangleleft = O_1ME \triangleleft = \alpha$, hiszen merőleges szárú hegyesszögek.

Az O_1O_2T háromszögből $\cos \alpha = \frac{R}{R+10}$, ahonnan

$$(1) \quad R = \frac{10 \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

Ha $\alpha = 30^\circ$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ és $R = 10 \left(3 + 2\sqrt{3} \right) \approx 64,64$.

Azt állítjuk, hogy a $0 < \alpha \leq 30^\circ$ intervallumban ez a legkisebb R érték.

(1) jobb oldalát alakítsuk át a következőképpen:

$$10 \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = 10 \frac{\cos \alpha - 1 + 1}{1 - \cos \alpha} = 10 \left(\frac{1}{1 - \cos \alpha} - 1 \right).$$

Ha $0 < \alpha < 30^\circ$, akkor α csökkenésével $\cos \alpha$ nő, $1 - \cos \alpha$ csökken, és $\frac{1}{1 - \cos \alpha}$ nő (és persze -1 -et levonva és 10 -zel

szorozva is nőni fog). Az $R : \alpha \rightarrow \frac{10 \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$ függvény tehát szigorúan monoton csökkenő, ha $0 < \alpha < 90^\circ$.

R tehát valóban 30° -nál veszi fel a legkisebb értékét, ha $0 < \alpha \leq 30^\circ$.

