

Az $x^2 + y^2 = 1$ feltétel szerint van olyan α valós szám, amelyre $x = \sin \alpha$ és $y = \cos \alpha$. A vizsgált kifejezés így

$$x^2 + 2xy = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \sin 2\alpha = \frac{1 + (2 \sin 2\alpha - \cos 2\alpha)}{2}.$$

A zárójelben álló függvényről megmutatjuk, hogy értékkészlete a zárt $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$ intervallum.

Mivel $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$, azért létezik olyan β , amelyre $\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ és $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Ezzel az

$$f(\alpha) = \sin(2\alpha - \beta) = \frac{2}{\sqrt{5}} \sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2\alpha$$

függvény értékkészlete a $[-1, 1]$ intervallum, ami állításunkkal egyenértékű. Tehát $x^2 + 2xy$ értékei az $\left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$ intervallum pontjait futják futják be.

Papp Dávid (Budapest, Szent István Gimn., 11. o.t.)