

I. megoldás. A bizonyítás során felhasználjuk a súlyozott számtani és súlyozott mértani közép közötti egyenlőtlenséget, amely az $s_1, s_2, \dots, s_n$ valós pozitív súlyokra és az $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív számokra a következő:

$$\frac{s_1 a_1 + s_2 a_2 + \dots + s_n a_n}{s_1 + s_2 + \dots + s_n} \geq (a_1^{s_1} a_2^{s_2} \dots a_n^{s_n})^{\frac{1}{s_1 + s_2 + \dots + s_n}},$$

és egyenlőség csak $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ esetén áll fenn.

Ha x pozitív egész, akkor $x = [x]$, így $\left(1 + \frac{[x]}{x}\right)^x = 2^{[x]}$, azaz egyenlőség van.

Ha x nem egész, de $x < 1$, akkor $[x] = 0$, és ezért ekkor is egyenlőség áll fenn.

Ha x nem egész és $x > 1$, úgy $x - [x] > 0$ és $[x] > 0$, tehát alkalmazhatjuk a súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az $s_1 = x - [x]$ és $s_2 = [x]$ súlyokra és az $a_1 = 1$ és $a_2 = 2$ számokra:

$$\frac{x - [x] + 2[x]}{x} > \sqrt[x]{2^{[x]}}, \quad \text{ahonnan} \quad \left(1 + \frac{[x]}{x}\right)^x > 2^{[x]}.$$

Vagyis az állítást igazoltuk, és egyenlőség $x < 1$ vagy egész x esetén van.

Harangi Viktor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.)

II. megoldás. A Bernoulli-egyenlőtlenséget alkalmazzuk: mivel $0 \leq \frac{[x]}{x} < 1$, azért

$$(1 + 1)^{\frac{[x]}{x}} \leq 1 + \frac{[x]}{x}.$$

Ezt az egyenlőtlenséget az x -edik hatványra emelve a bizonyítandó állítást kapjuk. Egyenlőség akkor van, ha $\frac{[x]}{x} = 0$ vagy 1, vagyis ha $x < 1$ vagy x egész.