

Először kiszámoljuk, hogy egy R sugarú gömb S felszínének mekkora részét fedi le egy olyan r sugarú ($0 \leq r \leq 2R$) G gömb, amelynek középpontja S -en van. A két gömb metszésvonala egy k kör. Ha k síkjának és G középpontjának a távolságát m -mel jelöljük, akkor a G által S -ből lefedett gömbsüveg felszíne az ismert képlet alapján $2R \cdot \pi \cdot m$ (1. ábra). Tudjuk, hogy S , G és k középpontjai – jelöljük ezeket rendre P , Q , T -vel – egy egyenesre illeszkednek. Tekintsünk egy olyan síkmetszetet, amely tartalmazza ezt az egyenest (2. ábra). Az ábrán látható ABQ háromszög Thalész tétele szerint derékszögű, így alkalmazhatjuk a befogótételt: $BQ^2 = AQ \cdot TQ$, azaz $r^2 = 2R \cdot m$. Tehát a G által S felszínéből lefedett gömbsüveg felszíne $r^2 \cdot \pi$.

Jelöljük ezután a feladatban szereplő négy gömb sugarát r_1, r_2, r_3, r_4 -gyel. Mivel a négy gömb páronként diszjunkt, az általuk lefedett felszín az előzőek alapján $(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2) \cdot \pi$. Az egység sugarú gömb felszíne 4π , így azt kell igazolnunk, hogy

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 \geq 1.$$

Tudjuk, hogy $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 2$; a számtani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 \geq 4 \cdot \left(\frac{r_1 + r_2 + r_3 + r_4}{4} \right)^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

Ezzel a bizonyítandó állítást beláttuk.

