

Alkalmazzuk 1999-szer a $2^{2^n} - 1 = (2^{2^{n-1}} - 1)(2^{2^{n-1}} + 1)$ azonosságot:

$$2^{2^{1999}} - 1 = (2^{2^{1998}} - 1)(2^{2^{1998}} + 1) = (2^{2^{1997}} - 1)(2^{2^{1997}} + 1)(2^{2^{1998}} + 1) = \dots = (2^{2^0} + 1)(2^{2^1} + 1) \dots (2^{2^{1998}} + 1).$$

Belátjuk, hogy a $2^{2^0} + 1, 2^{2^1} + 1, \dots, 2^{2^{1998}} + 1$ szorzótényezők páronként relatív prímek.

$2^{2^k} + 1$ és $2^{2^\ell} - 1$ relatív prímek, mert egymást követő páratlan számok. $(2^{2^k} - 1)$ -nek viszont osztója $2^{2^\ell} + 1$, ha $\ell < k$, mivel az előzőek szerint

$$2^{2^k} - 1 = (2^{2^0} + 1)(2^{2^1} + 1) \dots (2^{2^{k-1}} + 1).$$

Így $\ell < k$ esetén $2^{2^k} + 1$ és $2^{2^\ell} + 1$ relatív prímek.

$(2^{2^{1999}} - 1)$ -et tehát felbontottuk 1999 darab olyan 1-nél nagyobb szorzótényezőre, amelyek közül bármely kettő relatív prím. Ezért ennek a számnak valóban legalább 1999 különböző prímosztója van.

Vitéz Ildikó (Miskolc, Földes F. Gimn., 11. o.t.)