

Az állítás nem igaz, ha B és C egybeesik. Legyen például $n = 4$, az A_1, A_2, A_3, A_4 pontok alkossanak négyzetet, B és C pedig essen egybe ezen négyzet átlóinak metszéspontjával. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség miatt a sík minden P pontjára igaz, hogy $A_1P + A_3P \geq A_1A_3 = A_1B + A_3B$ és $A_2P + A_4P \geq A_2A_4 = A_2B + A_4B$ (1. ábra), tehát

$$\sum_{i=1}^4 A_iP \geq \sum_{i=1}^4 A_iB = \sum_{i=1}^4 A_iC.$$

Megmutatjuk, hogy ha viszont B és C különböző pontok, akkor igaz az állítás. Tegyük fel ennek az ellenkezőjét. Ekkor az $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontok nincsenek mind egy egyenesen, ezért biztosan van köztük egy olyan A_j pont, amelyik nincs rajta a BC egyenesen. Legyen a BC szakasz felezőpontja F , A'_j pedig A_j -nek az F -re vonatkozó tükörképe (2. ábra). Ekkor a tükrözés miatt $A_jC = A'_jB$, és így az $A_jBA'_j$ nem-elfajuló háromszög oldalaira felírva a háromszög-egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$A_jB + A_jC = A_jB + A'_jB > A_jA'_j = 2A_jF.$$

Hasonló módon kapjuk, hogy minden A_i pont esetén

$$A_iB + A_iC \geq 2A_iF,$$

(egyenlőség csak akkor lehet, ha A_i rajta van a BC egyenesen). Ezeket összeadva és felhasználva, hogy az A_j pontra vonatkozó egyenlőtlenségben soha nincs egyenlőség, kapjuk, hogy

$$2d = \sum_{i=1}^n A_iB + \sum_{i=1}^n A_iC > 2 \sum_{i=1}^n A_iF,$$

azaz $d > \sum_{i=1}^n A_iF$. Ez ellentmond feladatunk feltételeinek, tehát kezdeti feltevésünk hibás volt.

Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontok tehát valóban egy egyenesen vannak.

Megjegyzés. Könnyen látható, hogy egy egyenesen lévő $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontok esetén, ha n páros, léteznek a feladat feltételeinek eleget tevő különböző B és C pontok.

Koch Dénes (Linz, Akademische Gymnasium, 10. o.t.) dolgozata alapján

