

Jelöljük T -vel a megadott transzformációt. Először megmutatjuk, hogy T inverze megegyezik T -vel. Ehhez elegendő azt belátnunk, hogy ha T -t egymás után kétszer alkalmazzuk, akkor minden pont képe önmaga. Ez nyilvánvaló azon pontok esetén, amelyek illeszkednek az $y = x$ vagy az $y = -x$ egyenletű egyenesekre. Legyen $Q(a, b)$ egy olyan pont, amelyre $|a| \neq |b|$. Ekkor

$$T(T(Q(a, b))) = T\left(Q'\left(\frac{a}{a^2 - b^2}; \frac{b}{a^2 - b^2}\right)\right) = Q''\left(\frac{\frac{a}{a^2 - b^2}}{\left(\frac{a}{a^2 - b^2}\right)^2 - \left(\frac{b}{a^2 - b^2}\right)^2}; \frac{\frac{b}{a^2 - b^2}}{\left(\frac{a}{a^2 - b^2}\right)^2 - \left(\frac{b}{a^2 - b^2}\right)^2}\right).$$

A Q'' pont koordinátaiban szereplő emeletes törtet átalakítva:

$$\frac{\frac{a}{a^2 - b^2}}{\left(\frac{a}{a^2 - b^2}\right)^2 - \left(\frac{b}{a^2 - b^2}\right)^2} = \frac{a(a^2 - b^2)}{a^2 - b^2} = a \quad \text{és} \quad \frac{\frac{b}{a^2 - b^2}}{\left(\frac{a}{a^2 - b^2}\right)^2 - \left(\frac{b}{a^2 - b^2}\right)^2} = \frac{b(a^2 - b^2)}{a^2 - b^2} = b,$$

tehát Q'' valóban megegyezik Q -val.

Ha a síkon egy $\mathcal{A}$ alakzat egyenlete $F(x, y) = 0$, S pedig olyan invertálható transzformáció, amelynek S^{-1} inverze a $P(x, y)$ pontot a $P'(x', y')$ pontba viszi, akkor az $\mathcal{A}$ alakzat S -nél származó képének egyenlete $F(x', y') = 0$, mert $P \in S(\mathcal{A})$ pontosan akkor teljesül, ha $S^{-1}(P) \in S^{-1}(S(\mathcal{A}))$, azaz ha $P' \in \mathcal{A}$.

Esetünkben $T^{-1} = T$, tehát a transzformáció inverze is helyben hagyja azokat a pontokat, amelyeknek koordinátáira $|x| = |y|$ teljesül, $|x| \neq |y|$ esetén pedig $T^{-1}(P(x, y)) = P'\left(\frac{x}{x^2 - y^2}; \frac{y}{x^2 - y^2}\right)$. A sík minden e egyenesének egyenlete felírható $Ax + By + C = 0$ alakban, ahol $A^2 + B^2 \neq 0$. Az e egyenesnek azok a pontjai, amelyek rajta vannak az $y = x$ vagy az $y = -x$ egyenletű egyeneseken, helyben maradnak a T transzformációnál, az e további pontjai pedig az előzőek alapján az

$$A\frac{x}{x^2 - y^2} + B\frac{y}{x^2 - y^2} + C = 0$$

egyenletű alakzatra kerülnek. E pontok megegyeznek a

$$(1) \quad C(x^2 - y^2) + Ax + By = 0$$

egyenletű alakzat pontjaival. Az (1) egyenlet $C = 0$ esetén $A^2 + B^2 \neq 0$ miatt egy origón átmenő egyenes egyenlete. Ha $C \neq 0$, akkor (1) a következő alakra hozható:

$$(2) \quad \left(x + \frac{A}{2C}\right)^2 - \left(y - \frac{B}{2C}\right)^2 = \frac{A^2 - B^2}{4C^2}.$$

Ez $|A| \neq |B|$ esetén egy hiperbola, $|A| = |B|$ esetén pedig egy metsző egyenespár egyenlete.

Ezek alapján a sík egyenesének T -nél kapott képe a következő:

i) Ha e egy origón átmenő egyenes, akkor képe önmaga (1. ábra). Ha egyenlete $y = \pm x$, akkor a képe T definíciója szerint önmaga. Ha pedig egyenlete $Ax + By = 0$, akkor $C = 0$ miatt az (1) egyenlet, tehát e képének egyenlete is $Ax + By = 0$, és ennek az egyenesnek minden pontja előáll képként.

ii) Ha e nem megy át az origón és nem párhuzamos az $y = \pm x$ egyenletű egyenesek egyikével sem – azaz ha $C \neq 0$ és $|A| \neq |B|$ –, akkor e -nek az $y = \pm x$ egyenletű egyenesekkel való metszéspontjai helyben maradnak, a további pontok képei pedig a (2) egyenletű hiperbolának az origótól különböző összes pontját befutják (2. ábra).

iii) Ha e nem megy át az origón, de párhuzamos az $y = \pm x$ egyenletű egyenesek egyikével – azaz ha $C \neq 0$ és $|A| = |B|$ –, akkor a (2) egyenlet

$$(3) \quad \left(x + y + \frac{A - B}{2C}\right) \left(x - y + \frac{A + B}{2C}\right) = 0$$

alakba írható. $|A| = |B|$ miatt a két egyenes egyike megegyezik az $y = \pm x$ egyenesek egyikével. Az e egyenes képe a (3) egyenlettel leírt egyenespár másik egyenesé lesz, kivéve a 3. ábrán látható metszéspontot. Ezen kívül ebben az esetben is lesz egy fixpont, e -nek az $y = x$ vagy az $y = -x$ egyenletű egyenessel való metszéspontja.

Szilasi Zoltán (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján



