

Jelöljük az $ABCD$ négyszög oldalait az *ábrákon* látható módon a, b, c, d -vel, az A és a C csúcsnál lévő szögét pedig α -val, illetve γ -val.

A $KL = MN$ feltétel pontosan akkor teljesül, ha $KL^2 - MN^2 = 0$, vagyis – a koszinusztételt alkalmazva az AKL és a CNM háromszögekre – ha

$$(1) \quad \left[(\sqrt{ad})^2 + (\sqrt{ad})^2 - 2\sqrt{ad} \cdot \sqrt{ad} \cos \alpha \right] - \left[(\sqrt{bc})^2 + (\sqrt{bc})^2 - 2\sqrt{bc} \cdot \sqrt{bc} \cos \gamma \right] = 0.$$

Viszont az ABD és a CBD háromszögek közös BD oldalára felírt koszinusztétel szerint

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma,$$

ezért az (1) feltételt átalakíthatjuk a következő módon:

$$0 = (2ad - 2ad \cos \alpha) - (2bc - 2bc \cos \gamma) = 2ad - 2bc + b^2 + c^2 - (a^2 + d^2) = (b - c)^2 - (a - d)^2 = (a + b - c - d)(b + d - a - c)$$

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, mondhatjuk, hogy $KL = MN$ pontosan akkor teljesül, ha $a + b = c + d$ vagy $a + c = b + d$. (Ez a feltétel úgy is fogalmazható, hogy az A és C pontok ugyanazon a B és D fókuszú hiperbolán vannak.)

Terpai Tamás (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

