

Legyen $(x - y - 1) = a$, $(y - z - 2) = b$ és $(z - x + 3) = c$.

Mivel $a + b + c = 0$, azért

$$0 = (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab \underbrace{(a + b)}_{-c} + 3ac \underbrace{(a + c)}_{-b} + 3bc$$

Innen $abc = 6$.

Ez csak akkor teljesülhet, ha a három szám (valamilyen sorrendben): 6, 1, 1; 6, -1, -1; -6, -1, 1; 1, 2, 3; 1, -2, -3; -1, 2, -3; -1, -2, 3.

A feladat feltételének csak a legutóbbi számhármass felel meg, mert $a + b + c = 0$. Így a következő 6 megoldás lehetséges:

- | | | | | | |
|----|-----------|-----------|-----------|-------|----------------------|
| 1. | $a = -1,$ | $b = -2,$ | $c = 3.$ | Ekkor | $x = y = z.$ |
| 2. | $a = -2,$ | $b = -1,$ | $c = 3.$ | | $x = z = y - 1.$ |
| 3. | $a = -1,$ | $b = 3,$ | $c = -2.$ | | $x = y = z + 5.$ |
| 4. | $a = 3,$ | $b = -1,$ | $c = -2.$ | | $x = y + 4 = z + 5.$ |
| 5. | $a = 3,$ | $b = -2,$ | $c = -1.$ | | $x = y + 4 = z + 4.$ |
| 6. | $a = -2,$ | $b = 3,$ | $c = -1.$ | | $x = y - 1 = z + 4.$ |

Tehát minden olyan számhármassra igaz a feltétel, ahol

$$\begin{aligned} x = y = z, \quad x = y - 1 = z, \quad x = y = z + 5, \\ z = y + 4 = z + 5, \quad x = y + 4 = z + 4 \text{ vagy } x = y - 1 = z + 4, \end{aligned}$$

ha x , y és z egész számok. Ezzel meghatároztuk az összes keresett számhármast.

Nagy 444 Zoltán (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.)