

A feladatot úgy oldjuk meg, hogy az $APB\Delta \sim CPD\Delta$ hasonlóságban A képe C és B képe D legyen. Vegyük előre a speciális eseteket. Legyen először $AB = CD$, és a két szakasz illeszkedjen egy egyenesre (1. ábra). Az AB és CD ábra szerinti elhelyezkedése esetén végtelen sok megoldás lesz, és az APB és CPD háromszögek egybevágók. Könnyen látható, hogy P csak az AC felező merőlegesének egy F -től különböző pontja lehet. A pontok A, B, C, D sorrendje esetén nincs megoldás. Nem kapunk megoldást akkor sem, ha AB és CD egy egyenesre illeszkedik, és $AB \neq CD$.

Ekkor ugyanis a hasonlóság aránya $\frac{AB}{CD} \neq 1$, míg a P -ből induló magasságok aránya 1 lenne.

Ha $AB \parallel CD$, de nem esnek egy egyenesre (2. és 3. ábra), akkor P csak AC és BD metszéspontja lehet, különben PA és PC vagy PB és PD nem esnének egy egyenesbe, de akkor nem lenne egyenlő a két háromszögben az A -nál és C -nél vagy a B -nél és D -nél lévő szög. A 2. ábra szerinti esetben $AB = CD$ -re nincs megoldás.

Hátravan még az az eset, amikor AB és CD nem párhuzamosak. Tegyük fel először, hogy az APB és CPD háromszögek irányítása egyező (4. ábra). Ekkor P csak olyan pont lehet, amelyre a $\frac{CD}{AB}$ arányú, P középpontú, φ szögű nyújtva forgatás AB -t CD -be viszi át. Legyen AB és CD metszéspontja M , az ACM és BDM háromszögek körülírt körének másik metszéspontja P . Az azonosan jelölt kerületi szögek egyenlősége miatt az APB és CPD háromszögek megfelelnek a feladat feltételeinek. Mivel a két körnek M közös pontja, a P pont mindig létrejön, és a szerkesztésből látható, hogy egyértelműen, így egy megoldás lesz. Legfeljebb az fordulhat elő, hogy P egybeesik M -mel, amikor is a háromszögek elfajulóak, tehát nem lesz megoldás.

Ugyanígy oldhatjuk meg a feladatot, ha AB és CD az 5. ábra szerinti.

Legyen ezután APB és CPD irányítása különböző, és AB nem párhuzamos CD -vel (6. ábra). Mivel a P -nél lévő szögek egyenlők, a $BPD \triangleleft t$ felezőjére tükrözve, A képe a PC , B képe a PD egyenesre illeszkedik. A szögfelezőtétel szerint

$$\frac{AA_1}{A_1C} = \frac{PA}{PC} = \frac{AB}{CD}, \quad \text{és ugyanígy} \quad \frac{BB_1}{B_1D} = \frac{AB}{CD},$$

tehát A_1, B_1 és velük t megszerkeszthető. Ezután CA' és t metszéspontjaként (feltéve, hogy nem párhuzamosak) egyértelműen kapjuk a P pontot, tehát most is egy megoldás lesz.

Megjegyzések.

1. A 6. ábrán a CD szakasz az AB nyújtva tükrözéssel szerkesztett képe.
2. A nyújtva forgatás egy középpontos hasonlóság és egy, a középpont körüli forgatás szorzata (egymásutánja). Egyértelműen megadható a középponttal, a hasonlóság arányával és az elforgatás szögével.
3. A 4. és 6. ábráról leolvasható, hogy a nyújtva forgatás, illetve a nyújtva tükrözés két megfelelő pontpárral is megadható.
4. Bővebben olvashatunk ezekről a transzformációkról Reiman István: A geometria és határterületei c. könyve 111–113. oldalain.



