

Legyen a három, egy ponton átmenő, egymásra páronként merőleges egyenes a térbeli koordináta-rendszer három tengelye. A háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A(x, 0, 0)$; $B(0, y, 0)$; $C(0, 0, z)$. Jelöljük a háromszög oldalait a szokásos módon a , b és c -vel. A kapott derékszögű háromszögekre írjuk fel Pitagorasz tételét:

$$x^2 + y^2 = c^2, (1) \quad x^2 + z^2 = b^2, (2) \quad y^2 + z^2 = a^2. (3)$$

A háromszög akkor helyezhető el a kívánt módon, ha az egyenletrendszernek van megoldása.

A (3) és (2) különbségéből

$$y^2 - x^2 = a^2 - b^2,$$

ezt az (1) egyenlet megfelelő oldalával összeadva

$$2y^2 = a^2 + c^2 - b^2.$$

Mivel hegyesszögű háromszögben bármely két oldal négyzetösszege nagyobb a harmadik oldal négyzeténél, y^2 értéke pozitív. Hasonlóan kapjuk, hogy $x^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$ és $z^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$ is pozitív számok, így az (1), (2), (3) egyenletrendszer megoldható, az a , b , c oldalú háromszög tehát elhelyezhető a kívánt módon.

Nagy Marianna (Kecskemét, Bányai J. Gimn., 12. o.t.)

Megjegyzések. 1. Látható, hogy x , y és z egymástól függetlenül vehetnek föl ellentett értékeket, így a háromszöget $2^3 = 8$ -féleképpen lehet elhelyezni. Ezek az elhelyezések az egyenesek által meghatározott síkokra vonatkozó tükrözésekkel kaphatók egymásból, a 8 egybevágó háromszög egy oktaédert alkot.

2. A bizonyításból az is következik, hogy tompaszögű háromszög nem helyezhető el a kívánt módon, derékszögű pedig csak úgy, ha a derékszögű csúcs a három egyenes metszéspontja, maga a háromszög pedig benne van a három egyenes közül kettőnek a síkjában.

3. Ismeretes, hogy ha három, egy ponton átmenő, egymásra páronként merőleges egyenest egy, a közös pontjukon át nem menő síkkal metszünk, akkor a dőfspontok egy hegyesszögű háromszög csúcsai. A bizonyításból kiderül, hogy minden hegyesszögű háromszöget megkaphatunk ezen a módon.

