Legyen a három, egy ponton átmenő, egymásra páronként merőleges egyenes a térbeli koordináta-rendszer három tengelye. A háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A(x,\ 0,\ 0)$; $B(0,\ y,\ 0)$; $C(0,\ 0,\ z)$. Jelöljük a háromszög oldalait a szokásos módon a, b és c-vel. A kapott derékszögű háromszögekre írjuk fel Pitagorasz tételét:

$$x^2+y^2=c^2, (1) x^2+z^2=b^2, (2) y^2+z^2=a^2. (3)$$

A háromszög akkor helyezhető el a kívánt módon, ha az egyenletrendszernek van megoldása.

A (3) és (2) különbségéből

$$y^2-x^2=a^2-b^2,$$

ezt az (1) egyenlet megfelelő oldalaival összeadva

$$2y^2=a^2+c^2-b^2.$$

Mivel hegyesszögű háromszögben bármely két oldal négyzetösszege nagyobb a harmadik oldal négyzeténél, y^2 értéke pozitív. Hasonlóan kapjuk, hogy $x^2=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$ és $z^2=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$ is pozitív számok, így az (1), (2), (3) egyenletrendszer megoldható, az a, b, c oldalú háromszög tehát elhelyezhető a kívánt módon.

Nagy Marianna (Kecskemét, Bányai J. Gimn., 12. o.t.)

Megjegyzések. **1.** Látható, hogy x, y és z egymástól függetlenül vehetnek föl ellentett értékeket, így a háromszöget $2^3=8$-féleképpen lehet elhelyezni. Ezek az elhelyezések az egyenesek által meghatározott síkokra vonatkozó tükrözésekkel kaphatók egymásból, a 8 egybevágó háromszög egy oktaédert alkot.

2. A bizonyításból az is következik, hogy tompaszögű háromszög nem helyezhető el a kívánt módon, derékszögű pedig csak úgy, ha a derékszögű csúcs a három egyenes metszéspontja, maga a háromszög pedig benne van a három egyenes közül kettőnek a síkjában.

3. Ismeretes, hogy ha három, egy ponton átmenő, egymásra páronként merőleges egyenest egy, a közös pontjukon át nem menő síkkal metszünk, akkor a döféspontok egy hegyesszögű háromszög csúcsai. A bizonyításból kiderül, hogy minden hegyesszögű háromszöget megkaphatunk ezen a módon.