

Megoldás. Felhasználjuk az **N. 190.** feladatban igazolt segédteteleket.

A megoldás azon múlik, hogy a (3) egyenlőtlenségben egyenlőség áll, ha a $p(1)q(1), p(2)q(2), \dots, p(n)q(n)$ számok váltakozó előjelűek.

IV. segédttétel. Tetszőleges $0 < u, v < \pi$ számokra

$$(4) \quad |u - v| \leq \sqrt{5|\cos u - \cos v|}.$$

Bizonyítás. Legyen $w = |u - v|$, ekkor $\frac{w}{2} \leq \frac{u+v}{2} \leq \pi - \frac{w}{2}$, és

$$|\cos u - \cos v| = \left| 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{v-u}{2} \right| \geq 2 \sin^2 \frac{w}{2} \geq 2 \left(\frac{2}{\pi} \cdot \frac{w}{2} \right)^2 = \frac{2}{\pi^2} w^2 \geq \frac{1}{5} w^2.$$

Ezt átrendezve éppen (4)-et kapjuk.

Legyen $n \geq 100$, $m = \left\lfloor \frac{1}{10} \sqrt{n} \right\rfloor + 1$, és ismét

$$q(x) = T_m \left(\frac{n+1-2x}{n-1} \right).$$

Legyen továbbá $j = 0, 1, \dots, m$ esetén $a_j = \frac{n+1}{2} - \frac{n-1}{2} \cos \frac{\pi j}{m}$. A q polinom definíciója alapján

$$q(a_j) = q \left(\frac{n+1}{2} - \frac{n-1}{2} \cos \frac{\pi j}{m} \right) = T_m \left(\cos \frac{\pi j}{m} \right) = \cos(\pi j) = (-1)^j,$$

vagyis ezek azok a számok, ahol q értéke $+1$ vagy -1 .

Jelöljük minden $j = 0, 1, \dots, m$ esetén az a_j -hez legközelebbi egész számot b_j -vel.

V. segédttétel. A $b_0, b_1, \dots, b_m$ számokra teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

1. $1 = b_0 < b_1 < \dots < b_m = n$;

2. $q(b_j) > \frac{1}{2}$ ha j páros;

3. $q(b_j) < -\frac{1}{2}$ ha j páratlan.

Bizonyítás. Az $a_0, a_1, \dots, a_m$ számok definíciójából látható, hogy $1 = a_0 < a_1 < \dots < a_m = n$; ebből következik, hogy

$$(5) \quad 1 = b_0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_m = n.$$

Tetszőleges $j = 0, 1, \dots, m$ esetén legyen $c_j \in [0, \pi]$ az a szám, amelyre $b_j = \frac{n+1}{2} - \frac{n-1}{2} \cos c_j$.

A IV. segédttétel alapján

$$(6) \quad \left| c_j - \frac{\pi j}{m} \right| \leq \sqrt{5 \left| \cos c_j - \cos \frac{\pi j}{m} \right|} = \\ = \sqrt{5 \left| \frac{2}{n-1} \left(\frac{n+1}{2} - b_j \right) - \frac{2}{n-1} \left(\frac{n+1}{2} - a_j \right) \right|} = \sqrt{\frac{10}{n-1} |a_j - b_j|} \leq \sqrt{\frac{5}{n-1}}.$$

Mivel

$$q(b_j) = \cos m c_j = \cos \left(\pi j + m \left(c_j - \frac{\pi j}{m} \right) \right) = (-1)^j \cos m \left(c_j - \frac{\pi j}{m} \right),$$

és (6) alapján

$$m \left(c_j - \frac{\pi j}{m} \right) < \left(\frac{1}{10} \sqrt{n} + 1 \right) \sqrt{\frac{5}{n-1}} < \frac{\sqrt{n}}{5} \cdot \sqrt{\frac{5}{\frac{99}{100}n}} < \frac{\pi}{3},$$

a 2. és a 3. egyenlőtlenségek teljesülnek.

Mivel a $b_0, b_1, \dots, b_m$ sorozat váltakozó előjelű, (5)-ben sehol sem állhat egyenlőség, vagyis az 1. egyenlőtlenséglánc is igaz.

VI. segédttétel. $0 < q(0) < 5$.

Bizonyítás. A III. segédttétel 3. pontjához hasonlóan felhasználjuk, hogy

$$q(0) = T_m \left(\frac{n+1}{n-1} \right) = \text{ch} \left(m \cdot \text{ar ch} \frac{n+1}{n-1} \right).$$

Ebből azonnal következik, hogy $q(0)$ pozitív.

Mivel tetszőleges $u > 0$ esetén

$$\operatorname{ch} u = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^{2k}}{(2k)!} > 1 + \frac{u^2}{2},$$

$$\operatorname{ch} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n-1}} \right) > 1 + \frac{2}{n-1} = \frac{n+1}{n-1}, \quad \text{vagyis} \quad \operatorname{ar} \operatorname{ch} \frac{n+1}{n-1} < \frac{2}{\sqrt{n-1}}.$$

Mivel $m < \frac{1}{10}\sqrt{n} + 1 \leq \frac{1}{5}\sqrt{n} < \frac{1}{4}\sqrt{n-1}$, ebből következik, hogy

$$q(0) < \operatorname{ch} \left(\frac{1}{4}\sqrt{n-1} \cdot \frac{2}{\sqrt{n-1}} \right) = \operatorname{ch} \frac{1}{2} < 5.$$

Ezek után rátérhetünk a p polinom konstrukciójára. Legyenek $d_1 < d_2 < \dots < d_{n-m-1}$ azok az 1 és n közötti egészek, amelyek nem szerepelnek a $b_1, b_2, \dots, b_m$ számok között, és legyen

$$(7) \quad p(x) = (d_1 - x)(d_2 - x) \dots (d_{n-m-1} - x).$$

Tetszőleges $0 \leq j < m$ esetén a p polinomnak a (b_j, b_{j+1}) intervallumban pontosan $b_{j+1} - b_j$ darab gyöke van, ezért $p(b_j)$ és $p(b_{j+1})$ azonos előjelű, ha b_j és b_{j+1} paritása ellentétes, és fordítva. Mivel pedig $q(b_j)$ és $q(b_{j+1})$ ellentétes előjelűek, $p(b_j)q(b_j)$ és $p(b_{j+1})q(b_{j+1})$ pontosan akkor azonos előjelű, ha b_j és b_{j+1} paritása megegyezik. Mivel $p(1)$ és $q(1)$ pozitívak, ebből egyszerűen következik, hogy páratlan $1 \leq k \leq n$ esetén $p(k)q(k)$ nemnegatív, páros k esetén pedig nempozitív.

Írjuk fel (1)-et a pq polinomra (ezt megtehetjük, mert pq foka $n-1$) az $x=0$ választással, és rendezzük át a következőképpen:

$$(8) \quad p(0)q(0) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} p(k)q(k).$$

A p és q polinomok definíciója alapján $p(0) > 0$ és $q(0) > 0$, az előbbi megfontolások szerint pedig a jobb oldalon valamennyi tag nemnegatív, ezért (8)-at a következő formában is írhatjuk:

$$p(0) = \frac{1}{q(0)} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} |p(k)q(k)|.$$

A jobb oldalon $|q(k)| > \frac{1}{2}$ minden olyan esetben, amikor $p(k) \neq 0$; ezt és a VI. segédtételt figyelembe véve

$$p(0) < \frac{1}{5} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{|p(k)|}{2} = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} |p(k)|.$$

