

Induljunk ki az x^2 , $1 - x^2$ számokra felírt számtani és mértani közepek között fennálló egyenlőtlenségből ($x^2 \geq 0$, $1 - x^2 \geq 0$):

$$\frac{1}{2} = \frac{x^2 + (1 - x^2)}{2} \geq \sqrt{x^2(1 - x^2)} = |x|\sqrt{1 - x^2},$$

ezért

$$(1) \quad \sqrt{1 - x^2} \geq 2|x|(1 - x^2) = 2|x(1 - x^2)| = |f(x)|.$$

(1) éppen azt jelenti, hogy a vizsgált $[-1, 1]$ intervallumon $f(x)$ görbét tartalmazza az origó körüli 1 egység sugarú kör. Mivel egy zárt körlap két pontjának a távolsága legfeljebb annyi, mint a kör átmérője, ezért az f görbéjén lévő bármely két pont távolsága legfeljebb 2. Ez elérhető, például az $A = (-1; 0)$ és $D = (1; 0)$ pontok esetén.

Ahhoz, hogy ezt a határt valóban elérjük, mindkét pontnak a köríven kell lennie, mégpedig egymással átellenesen. Az előbb említettől különböző megoldást úgy kaphatunk, ha $x \neq \pm 1$ (és $\sqrt{1 - x^2} \neq 0$).

(1)-ben viszont pontosan akkor áll egyenlőség, ha a számtani–mértani közép közötti egyenlőtlenségben is egyenlőség van, azaz $x^2 = 1 - x^2$, tehát $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ez két pontot ad: $B = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ és $C = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Ezek valóban a körön helyezkednek el egymással szemben és f görbéjén is rajta vannak. Így két megoldást kaptunk: az A , D és a B , C pontpárokat.

Szabó Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

