

Jelölje a k -adik napon evés előtt még meglévő mogyorók számát $e(k)$, amiből k mogyoró elfogyasztása után $u(k)$ marad; így

$$(1) \quad e(k) = u(k) + k \quad (k \leq n).$$

Ezután a mókus még megeszik $\frac{u(k)}{100}$ darab mogyorót, tehát $u(k) = \frac{u(k)}{100} = e(k+1)$, azaz

$$(2) \quad u(k) = \frac{100}{99}e(k+1) \quad (k \leq n-1).$$

Tudjuk, hogy $e(n) = n$, így $u(n-1) = \frac{100}{99}n$. Ennek, valamint (1)-nek és (2)-nek az alapján a mókus eredeti mogyorókészlete:

$$S = e(1) = 1 + u(1) = 1 + \frac{100}{99}e(2) = 1 + \frac{100}{99}(u(2) + 2) = 1 + \frac{100}{99} \left(2 + \frac{100}{99}e(3) \right) = 1 + \frac{100}{99} \left(2 + \frac{100}{99}(u(3) + 3) \right) = \dots = 1 + \frac{100}{99}e(n) = 1 + \frac{100}{99}n.$$

Mivel az S egész, azért $100^n(n-99)$ osztható 99^{n-1} -nel. Ez két extrém esetben biztosan teljesül: ha $n = 1$ (és akkor $S = 1$) vagy ha $n = 99$ (és akkor $S = 99^2 = 9801$). Könnyen látható, hogy ez a két eset valóban megoldása a feladatnak; megmutatjuk viszont, hogy több megoldás nincs, ugyanis $2 \leq n \neq 99$ esetén az oszthatóság nem áll fenn.

Mivel 99 és 100 egymáshoz relatív prímek, azért az oszthatóság (akkor és) csak akkor teljesül, ha $n-99$ is osztható 99^{n-1} -nel. Az $1 < n$ -re való indukcióval azonban belátjuk, hogy $|n-99| < 99^{n-1}$, ezért a mondott eseteken kívül nem állhat fenn az oszthatóság.

Nyilván ($n = 2$ -re és 100 -ra) $97 < 99$ és $1 < 99^{99}$; tegyük fel, hogy valamilyen $(k-1)$ -re $|(k-1) - 99| < 99^{k-2}$ teljesül, és $k \neq 100$.

Ekkor

$$99^{k-1} = 99 \cdot 99^{k-2} > 99 \cdot |(k-1) - 99| \geq 1 + |(k-1) - 99| \geq |k - 99|,$$

tehát az egyenlőtlenség k -ra is fennáll, így minden n -re teljesül.

Szép László (Miskolc, Földes F. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján