

A válasz nemleges. Konstruálunk egy olyan halmazt, amely eleget tesz a feladat feltételeinek, ugyanakkor nem megszámlálható.

Tetszőleges $\overline{0, a_1 a_2 a_3 \dots}$ tizedestörthöz rendeljük hozzá a következő halmazt:

$$f(\overline{0, a_1 a_2 a_3 \dots}) = \{\overline{1a_1}, \overline{1a_1 a_2}, \overline{1a_1 a_2 a_3}, \overline{1a_1 a_2 a_3 a_4}, \dots\}.$$

Ezzel minden 0 és 1 közötti valós számhoz hozzárendeltünk egy pozitív egész számokból álló halmazt. A halmaz elemei egyértelműen meghatározzák a tizedestörtet, ezért különböző számokhoz különböző halmazt rendeltünk.

Ha $a = \overline{0, a_1 a_2 a_3 \dots}$ és $b = \overline{0, b_1 b_2 b_3 \dots}$ két különböző szám, amelyek tizedestört alakja először az n -edik tizedesjegyben különbözik, akkor az $f(a)$ és az $f(b)$ halmazoknak az $1a_1, 1a_1 a_2, 1a_1 a_2 \dots, a_{n-1}$ számok közös elemeik, a további elemek viszont különböznek az $(n+1)$ -edik jegyükben. Ezért az $f(a)$ és $f(b)$ halmazoknak csak véges sok, egészen pontosan $n-1$ közös eleme van.

Álljon most H az összes olyan halmazból, amely előáll $f(x)$ alakban valamely $[0, 1)$ intervallumbeli x valós számra. A fentiek szerint H bármely két elemének a metszete véges. Ugyanakkor az f függvény kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a nem megszámlálható $[0, 1)$ intervallum és H között, ezért a H maga sem megszámlálható.