

Először is megjegyezzük, hogy a jobb oldalon a 2 helyett nem írható kisebb szám. Ha ugyanis $a_m = \frac{1}{m}$ tetszőleges m indexre, akkor

$$a_1 = \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}} + \cdots + \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{1 + 2 + \cdots + k} = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k+1},$$

ezért

$$2 \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n \frac{k}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_k}} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{2}{k+1} = 2 - \frac{2}{n+1} < 2.$$

Ugyanakkor, mint ismeretes, n növelésével a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ összeg bármilyen nagy lehet.

Írjuk fel ezután a súlyozott harmonikus és számtani közepek közötti egyenlőséget az $a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, ka_k$ számokra az 1, 2, $\dots, k$ súlyokkal:

$$\begin{aligned} \frac{1 + 2 + \cdots + k}{1 \cdot \frac{1}{a_1} + 2 \cdot \frac{1}{2a_2} + \cdots + k \cdot \frac{1}{ka_k}} &= \frac{\frac{k(k+1)}{2}}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_k}} \leq \\ &\leq \frac{a_1 + 2 \cdot 2a_2 + \cdots + k \cdot ka_k}{1 + 2 + \cdots + k} = \frac{1^2 \cdot a_1 + 2^2 \cdot a_2 + \cdots + k^2 \cdot a_k}{\frac{k(k+1)}{2}}, \end{aligned}$$

vagyis

$$(1) \quad \frac{k}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k}} \leq \frac{4}{k(k+1)^2} (1^2 \cdot a_1 + 2^2 \cdot a_2 + \cdots + k^2 \cdot a_k).$$

Ennek az egyenlőtlenségnek az a nagy előnye, hogy az $a_m = \frac{1}{m}$ választás esetén egyenlőség áll.

Összeadva (1)-et a $k = 1, 2, \dots, n$ értékekre, valamint felhasználva a beszorzással könnyen ellenőrizhető $\frac{4}{k(k+1)^2} < \frac{2}{k^2} - \frac{2}{(k+1)^2}$ egyenlőtlenséget,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{k}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k}} &\leq \sum_{k=1}^n \frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{m=1}^k m^2 a_m = \\ &= \sum_{m=1}^n \left(\sum_{k=m}^n \frac{4}{k(k+1)^2} \right) \cdot m^2 a_m < \sum_{m=1}^n \left(\sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{2}{k^2} - \frac{2}{(k+1)^2} \right) \right) \cdot m^2 a_m = \\ &= \sum_{m=1}^n \frac{2}{m^2} \cdot m^2 a_m = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n). \end{aligned}$$

Ezzel az állítást igazoltuk.