

Állítsunk az a, b, c, d egyenesek mindegyikére egy-egy merőleges síkot; ekkor a négy sík, S_a, S_b, S_c és S_d egy T tetraédert határol. Legyen T -nek az S_a -val szemközti csúcsa A , az S_b -vel szemközti csúcsa B , az S_c -vel szemközti csúcsa C , az S_d -vel szemközti csúcsa pedig D .

Ekkor T élei párhuzamosak az eredeti négy egyenes páronkénti normáltranszverzálisaival, mert pl. AB benne van az S_c és az S_d síkokban is, ezért c -re is és d -re is merőleges. Feltételeink szerint ekkor T szemközti élpárjai közül CD merőleges AB -re és BD merőleges AC -re. Azt kell megmutatnunk, hogy ekkor BC is merőleges AD -re.

Legyen $\overrightarrow{DA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{DB} = \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{DC} = \mathbf{c}$. Tudjuk, hogy két vektor pontosan akkor merőleges, ha skaláris szorzatuk 0. Tehát $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ és $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, vagyis

$$\mathbf{c}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0 \quad \text{és} \quad \mathbf{b}(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0.$$

A két egyenletet egymásból kivonva kapjuk, hogy

$$\mathbf{ab} - \mathbf{ac} = 0, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{a}(\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0.$$

A BC és a DA élek tehát valóban merőlegesek.

Gueth Krisztián (Szombathely, Kanizsai D. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

