

Oldjuk meg általánosabban a feladatot, 23 helyett n csapatra, ahol n páratlan szám. Jelöljük minden csapatot egy-egy ponttal. Két csapat mérkőzése után mutasson nyíl a vesztes csapattól a győztesig. (Ekkor egy n szögpontú irányított teljes gráfot kapunk, mivel a feladat szempontjából feltehető, hogy sohasem született döntetlen eredmény.)

Ha az A , B és C csapatok körbeverték egymást, – ez kétféleképpen lehetséges –, akkor az ABC háromszöget irányítottnak nevezzük. Egyébként a háromszög nem irányított.

Adjunk becslést a nem irányított háromszögek számára.

Minden nem irányított háromszögben van pontosan egy csúcs úgy, hogy az ezzel ábrázolt csapat a másik kettőt megverte. A nem irányított háromszögeket eszerint a „győztes” csúcs szerint számoljuk össze.

Jelöljük a csapatokat az $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontokkal, és jelölje az A_i győzelmeinek számát d_i . Mivel a körmérkőzés során összesen $\binom{n}{2}$ találkozó volt, $\sum_{i=1}^n d_i = \frac{n(n-1)}{2}$. Ekkor az A_i csúcshoz $\binom{d_i}{2}$ nem irányított háromszög tartozik, hiszen az általa legyőzött csapatokból kell kiválasztani kettőt.

Így az összes nem irányított háromszögek száma: $\sum_{i=1}^n \binom{d_i}{2}$.

A számtani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenség szerint:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \binom{d_i}{2} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i = \frac{1}{2} n \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{n} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i \geq \frac{1}{2} n \left(\frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i = \\ &= \frac{1}{2} n \left(\frac{n-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^3 - 4n^2 + 3n}{8}. \end{aligned}$$

Állhat-e itt egyenlőség? Igen, ha meg tudunk adni olyan irányított teljes gráfot, amelyre

$$d_1 = d_2 = \dots = d_n = \frac{n-1}{2}.$$

Legyen $n = 2k + 1$. Ekkor egy lehetséges konstrukció a következő:

ha $1 \leq i < j \leq 2k + 1$ és $j - i$ nagyobb, mint k , akkor A_j győzte le A_i -t, különben pedig A_i győzte le A_j -t. Könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor valóban

$$d_1 = d_2 = \dots = d_n = \frac{n-1}{2}.$$

Mivel összesen $\binom{n}{3}$ háromszög van, azért az irányított háromszögek száma esetünkben

$$\binom{n}{3} - \frac{n^3 - 4n^2 + 3n}{8} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{n^3 - 4n^2 + 3n}{8} = \frac{n^3 - n}{24}.$$

Az $n = 23$ esetén ez 506, tehát legfeljebb 506 körbeverés történhetett a bajnokság során.

Juhász András (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján