

Az $f(x) = x + \frac{n}{x}$ függvényt vizsgáljuk a pozitív egész számok halmazán.

$$f(x) < f(x+1) \Leftrightarrow x + \frac{n}{x} < x+1 + \frac{n}{x+1} \Leftrightarrow n \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) < 1 \Leftrightarrow n < x(x+1).$$

Nyilvánvalóan mindig pontosan egy olyan p pozitív egész szám van, amelyre

$$p^2 \leq n < p^2 + p \quad \text{vagy} \quad p^2 + p \leq n < (p+1)^2.$$

Ekkor

$$p + \frac{n}{p} < p+1 + \frac{n}{p+1}, \quad \text{ha} \quad n < p^2 + p$$

és

$$p + \frac{n}{p} \geq p+1 + \frac{n}{p+1}, \quad \text{ha} \quad n \geq p^2 + p.$$

Azaz, ha $p^2 \leq n < p^2 + p$, akkor

$$[b(n)] = \left[p + \frac{n}{p} \right] = p + \left[\frac{n}{p} \right].$$

Mivel $p \leq \frac{n}{p} < p+1$, azért ebben az esetben $\left[\frac{n}{p} \right] = p$, és így $[b(n)] = 2p$. Továbbá

$$2p < \sqrt{4p^2 + 1} \leq \sqrt{4n+1} < \sqrt{4p(p+1) + 1} = 2p+1,$$

mint az feltevésünkéből adódik, s innen $[\sqrt{4n+1}] = 2p = [b(n)]$ következik.

Ha pedig $p^2 + p \leq n < (p+1)^2 < (p+1)(p+2)$, akkor

$$[b(n)] = \left[p+1 + \frac{n}{p+1} \right] = p+1 + \left[\frac{n}{p+1} \right],$$

s mivel $p \leq \frac{n}{p+1} < p+1$, azért $\left[\frac{n}{p+1} \right] = p$, és így $[b(n)] = 2p+1$. Továbbá

$$2p+1 \leq \sqrt{4n+1} \leq \sqrt{((p+1)^2 - 1) + 1} < 2p+2,$$

ahonnan $[\sqrt{4n+1}] = 2p+1$ adódik.

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Baharev Ali (Budapest, Apáczai Cs. J. Gyak. Gimn., 10. o.t.)