

A feladatot 3 pozitív valós szám helyett $n > 2$ pozitív valós számra oldjuk meg.

a) Ha $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$, akkor nem mindig igaz, hogy $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \leq n$, erre példa az $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 2$ választás, amikor a számok és reciprokaik összege is nagyobb, mint n .

b) Belátjuk, hogy ha $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq n$, akkor $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \geq n$.

Tegyük fel, hogy mégis vannak olyan $x_1, \dots, x_n$ pozitív valós számok, amelyekre $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} < n$. Ekkor

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) < n^2$$

lenne. Az egyenlőtlenség bal oldalán az n^2 darab szorzást elvégezve:

$$\underbrace{\frac{x_1}{x_1} + \frac{x_2}{x_2} + \dots + \frac{x_n}{x_n}}_{n \text{ darab}} + \underbrace{\left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \right) + \left(\frac{x_1}{x_3} + \frac{x_3}{x_1} \right) + \dots + \left(\frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1}} \right)}_{\frac{n^2 - n}{2} \text{ darab}} \geq n + \frac{n^2 - n}{2} \cdot 2 = n^2,$$

hiszen ismeretes, hogy ha a és b pozitív valós számok, akkor $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Ellentmondásra jutottunk, a b) rész állítása tehát igaz.

Harangi Viktor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.) és *Darabos József* (Bonyhád, Petőfi S. Gimn., 10. o.t.) megoldásai alapján