A tetraéder csúcsait jelölje A, B, C és D, a csúcsokkal szemközti lapok területét rendre T_A, T_B, T_C és T_D, a hozzájuk tartozó magasságokat pedig m_A, m_B, m_C és m_D.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

$$T_A \le T_B \le T_C \le T_D. \tag{1}$$

A tetraéder térfogata: $V = \dfrac{\text{alapterület} \cdot \text{magasság}}{3}$.

Mivel bármelyik lapot tekinthetjük alapnak, azért

$$T_A \cdot m_A = T_B \cdot m_B = T_C \cdot m_C = T_D \cdot m_D;$$

ebből az (1) feltevés miatt következik, hogy

$$m_A \ge m_B \ge m_C \ge m_D.$$

Mivel a tetraéderbe írt gömb a négy lap mindegyikét érinti, középpontja minden laptól sugárnyi, azaz R távolságra van.

Írjuk most fel a tetraéder térfogatát azon gúlák térfogatának összegeként, amelyeknek alapja a tetraéder egy-egy lapja, magassága pedig R. Ekkor

$$V = \frac{T_A \cdot m_A}{3} = \frac{T_A \cdot R}{3} + \frac{T_B \cdot R}{3} + \frac{T_C \cdot R}{3} + \frac{T_D \cdot R}{3},$$

ahonnan

$$m_A = R\frac{T_A + T_B + T_C + T_D}{T_A} = R\left(1 + \frac{T_B}{T_A} + \frac{T_C}{T_A} + \frac{T_D}{T_A}\right). \tag{2}$$

Mivel az (1) feltevés szerint T_B, T_C és T_D egyike sem kisebb T_A-nál, $\dfrac{T_B}{T_A} \ge 1$, $\dfrac{T_C}{T_A} \ge 1$, $\dfrac{T_D}{T_A} \ge 1$, így (2) jobb oldalát tovább csökkentve azt kapjuk, hogy

$$m_A \ge 4R = 2d.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $T_A = T_B = T_C = T_D$, vagyis ha a tetraéder lapjainak területe egyenlő. Meglepő, de ebből még nem következik, hogy a tetraéder szabályos.

Birkner Tamás (Budapest, Deutsche Schule, 6. o.t.)

Megjegyzés. Sokan csak szabályos tetraéderre igazolták az állítást. (Ők 1 pontot kaptak.) A szabályos tatraéder minden magassága egyenlő: $m_i = 4r$. Érdekes azonban, hogy $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{m_i} = \frac{1}{r}$ miatt $m_i = 4r$ minden i-re pontosan akkor áll fenn, ha $T_1 = T_2 = T_3 = T_4$ (T_i az i-edik lap területe). Szinte minden beküldő úgy gondolta, hogy ebből következik a tetraéder szabályos volta. Ez nem igaz, a feltétel az úgynevezett *egyenlő oldalú* tetraéderre is teljesül. *Birkner Tamás* ezért az észrevételéért kapott 6 pontot. (Az egyenlő oldalú tetraéderről bővebben olvashatunk *Reiman István:* A geometria és határterületei c. könyvének (Gondolat, 1986) 84. oldalán.)