

Jelölje $a_0 < \dots < a_{n-1}$ az első n darab olyan nemnegatív egészet, amelynek a hármas számrendszerbeli alakja csupa 0-s és 1-es számjegyekből áll. Ezekre fogjuk belátni, hogy teljesítik a feladat követelményeit.

Bebizonyítjuk, hogy e számok között nincs 3 különböző tagból álló számtani sorozat. Tegyük fel indirekte, hogy $2a_i = a_j + a_k$. Az $a_j + a_k$ kiszámításánál a műveleteket helyiértékenként végezhetjük el, hiszen nincs „átvitel”. Az eredmény minden helyiértéknél 0 vagy 2 lesz, $2a_i$ jegyei ilyenek. De ez azt jelenti, hogy a_j -ben egy helyiértéken 1-es akkor és csak akkor állhat, ha a_k ugyanazon helyiértéken is 1-es áll. Ekkor $a_j = a_k = a_i$, ami ellentmondás.

Tegyük fel, hogy $|a_i - a_j| > |a_i - a_k|$ ($i \neq j \neq k \neq i$), azaz $|a_i - a_j| \geq |a_i - a_k| + 1$. Ekkor

$$\frac{|a_i - a_j|}{|a_i - a_k|} \geq 1 + \frac{1}{|a_i - a_k|},$$

így elég lenne azt igazolni, hogy $|a_i - a_k| < n^{1,6}$; sőt, ehhez már az is elég, ha $a_{n-1} \leq (n-1)^{1,6}$ teljesül, ugyanis $|a_i - a_k| \leq a_{n-1}$.

Vegyük észre, hogy a_{n-1} megkapható úgy, hogy $(n-1)$ -et felírjuk 2-es számrendszerben, és ezt 3-as számrendszerben olvassuk ki. Ebből adódik, hogy $a_{2^m} = 3^m$, és ha $0 \leq t < 2^m$, akkor $a_{2^m+t} = 3^m + a_t$.

Ezután $a_{n-1} \leq (n-1)^{1,6}$ egyenlőtlenséget teljes indukcióval bizonyítjuk.

Ha $n = 1$ vagy 2, akkor az állítás igaz. Tegyük fel, hogy igaz minden, az n -nél kisebb egésze; ekkor legyen $n-1 = 2^m + t$, ahol $0 \leq t < 2^m$. Az indukciós feltevés szerint $a_t \leq t^{1,6}$; felhasználva, hogy $2^{1,6} > 3$ és $0 < x < 1$ esetén $1,6x > x^{1,6}$:

$$\begin{aligned} (n-1)^{1,6} &= (2^m + t)^{1,6} = 2^{1,6m} \left(1 + \frac{t}{2^m}\right)^{1,6} > 2^{1,6m} \left(1 + 1,6 \cdot \frac{t}{2^m}\right) > \\ &> 2^{1,6m} \cdot \left(1 + \left(\frac{t}{2^m}\right)^{1,6}\right) = 2^{1,6m} + t^{1,6} > 3^m + a_t = a_{2^m+t} = a_{n-1}. \end{aligned}$$

Több megoldás alapján