Ha $a \mid b^2+b+1$ és $b \mid a^2+a+1$, akkor a és b relatív prímek. Ha ugyanis a és b legnagyobb közös osztója d, akkor $d \mid a$, illetve $a \mid b^2+b+1$ miatt $d \mid 1$. Mivel $a^2+b^2+a+b+1$ osztható az egymáshoz relatív prím a-val és b-vel, osztható ab-vel is.

Megfordítva, ha $a^2+b^2+a+b+1$ osztható ab-vel, akkor nyilván teljesülnek a feladatban szereplő oszthatóságok is. Összefoglalva: $a \mid b^2+b+1$ és $b \mid a^2+a+1$ akkor és csak akkor teljesül, ha $ab \mid a^2+b^2+a+b+1$.

Legyen az n pozitív egész, és tekintsük az

$$x^2+y^2+x+y+1=nxy \tag{1}$$

egyenletet. Azt állítjuk, hogy ha ennek van egy pozitív egészekből álló megoldása, akkor végtelen sok van. Tegyük fel, hogy $(x_0,\ y_0)$ egy megoldása (1)-nek és $x_0 \le y_0$. Ha (1)-et paraméteres másodfokú egyenletnek tekintjük, amelyben x az ismeretlen, akkor az egyenlet egyik gyöke x_0, a másik pedig a gyökök és együtthatók közti összefüggés alapján

$$x_1 = ny_0 - 1 - x_0 = \frac{y_0^2+y_0+1}{x_0}.$$

Az első formula alapján ez a gyök is egész, a második alapján pedig pozitív, sőt

$$x_1 = \frac{y_0^2+y_0+1}{x_0} > \frac{y_0^2}{y_0} = y_0.$$

Az (1) egyenletnek ezért az $(x_1,\ y_0)$ számpár egy újabb, pozitív egészekből álló megoldása, amelyben a két szám összege nagyobb, mint az előzőben: $x_1+y_0 > x_0+y_0$. A megoldások között nincs tehát olyan, amelyben a két ismeretlen összege maximális.

Végül ha $n=5$, akkor (1)-nek van is megoldása, például $x=y=1$. Az előbbiek alapján ebből következik, hogy végtelen sok olyan $(a,\ b)$ számpár van, amelyre $a^2+b^2+a+b+1=5ab$, amivel a feladat állítását igazoltuk.

Megjegyzések. 1. A feladat rokonságot mutat a KöMaL N.67. feladattal, amelynek megoldása megtalálható az 1996/4. számban. Ott azt kellett igazolni, hogy végtelen sok pozitív $(m,\ n)$ számpár létezik, amelyre $n \mid m^2+1$ és $m \mid n^2+1$. Az egyik megoldás ugyanúgy megy, mint ennél a feladatnál.

2. Tekintsük az $f_1=f_2=1$ kezdőelemekkel definiált $f_n=5f_{n-1}-f_{n-2}-1$ sorozatot. Nem nehéz igazolni (pl. teljes indukcióval), hogy tetszőleges k pozitív egész esetén

$$f_k^2+f_k+1=f_{k-1}\cdot f_{k+1}.$$

Ekkor viszont igaz, hogy $\dfrac{f_k^2+f_k+1}{f_{k+1}} = f_{k-1} \in \mathbf{Z}$ és $\dfrac{f_{k+1}^2+f_{k+1}+1}{f_k} = f_{k+2} \in \mathbf{Z}$, tehát a sorozat $(f_k,\ \ f_{k+1})$ számpárjai is megfelelőek, amiből szintén következik, hogy végtelen sok megfelelő számpár van. (Továbbá más n-re nincs megoldása, és ezek adják az összes megoldást.)

3. A feladatot általánosíthatjuk a következő módon: bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan a, b pozitív egész szám van, amelyre adott pozitív egész k esetén $a \mid b^2+kb+1$ és $b \mid a^2+ka+1$. $k=1$ esetén kapjuk az eredeti feladatot, $k=0$ esetén pedig az 1. megjegyzés feladatát. A fentiekhez hasonlóan lehet belátni ezt az állítást is.

Pataki Péter (Miskolc, Földes F. Gimn., 12. o.t.)