

I. megoldás. A feladatbeli egyenlet x^2 -re másodfokú, ezt (y -nal mint paraméterrel) megoldva:

$$x^2 = \frac{-y^2 \pm \sqrt{y^4 + 4y^{100}}}{2}.$$

Ahhoz, hogy x^2 egész szám legyen, szükséges, hogy $y^4 + 4y^{100}$ négyzetszám. Mivel $(2y^{50})^2 \leq y^4 + 4y^{100} < (2y^{50} + 1)^2$ – ha y egész –, ezért $4y^{100} = y^4 + 4y^{100}$, azaz $y = 0$ és akkor $x = 0$, ami valóban megoldás.

Babos Attila (Budapest, Apáczai Cs. J. Gimn., 10. o.t.)

II. megoldás. Tegyük fel, hogy x és y 0-tól különböző. Ekkor

$$x^2 y^2 = y^{100} - x^4 = (y^{50} - x^2)(y^{50} + x^2) = (y^{25} - x)(y^{25} + x)(y^{50} + x^2).$$

Itt, mivel $y^{25} + x$ és $y^{50} + x^2$, valamint $x^2 y^2$ pozitív, $y^{25} - x \geq 1$. Másrészt $y^{25} + x > y^2$ és $y^{50} + x^2 > x^2$, ezért

$$x^2 y^2 = (y^{25} - x)(y^{25} + x)(y^{50} + x^2) > 1 \cdot y^2 \cdot x^2,$$

ami ellentmondás. Tehát x vagy y nulla, és így az egyetlen megoldás $x = y = 0$.

Naszódi Gergely (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

III. megoldás. Az előző megoldáshoz hasonlóan ezúttal is az $xy \neq 0$ esettel foglalkozunk. Jelölje az x és y legnagyobb közös osztóját d ; ekkor $x = da$, $y = db$, ahol a és b egymáshoz relatív prím pozitív egészek. Az egyenlet mindkét oldalát d^4 -nel elosztva:

$$a^2(a^2 + b^2) = d^{96}b^{100}.$$

Mivel a és b relatív prímekek, ezért b^{100} az a^2 -hez is és az $(a^2 + b^2)$ -hez is relatív prím. Az egyenlet szerint azonban b^{100} osztója $a^2(a^2 + b^2)$ -nek; ez csak úgy lehetséges, ha $b^{100} = 1$, azaz $b = 1$. Ekkor $a^2 + 1 = \frac{d^{96}}{a^2} = \left(\frac{d^{48}}{a}\right)^2$, ami lehetetlen, hiszen egy pozitív négyzetszám rákövetkezője nem lehet négyzetszám.

Devecsery András (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)