

Vezessük be az $a = (n, k)$, $b = (k, m)$ és $c = (m, n)$ jelöléseket. Ekkor nyilván $(a, b) = (b, c) = (c, a) = (a, b, c) = (n, k, m)$. Jelöljük ezt a számot A -val. Először megmutatjuk, hogy most az A értéke 1, vagy 2.

Az A osztja a -t, b -t és c -t, ezért osztja a számok négyzetét, így az ezekkel a feltétel szerint egyenlő $n + k$, $k + m$ és $m + n$ összegeket is. Így osztója az ezekből az összegekből készített $(n + k + k + m - (m + n)) = 2k$, és ugyanígy a $2n$ és a $2m$ mennyiségeknek. Osztója tehát ezek legnagyobb közös osztójának, $(2k, 2n, 2m) = 2(k, n, m) = 2A$ -nak is. Ha viszont $A^2 \mid 2A$, akkor innen $A \mid 2$, azaz valóban $A = 1$ vagy $A = 2$ következik.

Mivel n osztható a -val és c -vel, osztható legkisebb közös többszörösükkel is és így természetesen legalább akkora, mint az

$$n \geq [a, c] = \frac{ac}{(a, c)} = \frac{ac}{A}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy $k \geq \frac{ab}{A}$ és $m \geq \frac{bc}{A}$. Az első két egyenlőtlenséget összeadva $a^2 = n + k \geq \frac{ac + ab}{A}$, azaz

$$A \cdot a \geq b + c. \quad (1) \quad \text{Rendreugyanygkapjuk} \quad A \cdot b \geq c + a. \quad (2) \quad \text{és} \quad A \cdot c \geq a + b. \quad (3)$$

egyenlőtlenségeket, végül ezek összegeként, hogy

$$A \cdot (a + b + c) \geq 2 \cdot (a + b + c).$$

Így $A \geq 2$, vagyis a már igazolt $A \mid 2$ -vel egybevetve csak $A = 2$ lehetséges. Ekkor persze az $A \cdot (a + b + c) \geq 2 \cdot (a + b + c)$ egyenlőtlenségben egyenlőség áll. Ez pedig azt jelenti, hogy az (1), (2), (3) egyenlőtlenségekben is egyenlőség van, azaz $2a = b + c$, $2b = a + c$ és $2c = a + b$. Innen pedig $a = b = c$ következik, és $A = (a, b, c) = 2$ miatt a közös értékük 2.

Végül pedig $n + k = k + m = m + n = A^2 = 4$, tehát az egyenletrendszer egyetlen megoldása $k = n = m = 2$.

Harangi Viktor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9 o.t.) és *Kunszenti-Kovács-Dávid* (Oslo, Lycée Français René

Cassin) dolgozatai alapján

Megjegyzések. 1. Felhasználva az $A \leq 2$ eredményt, *Kiss 345 Gergely* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) ötlete alapján érdekes geometriai bizonyítás adható az $a = b = c$ egyenlőségre.

Az a, b, c számok közül bármely kettő négyzetösszege nagyobb a harmadik négyzeténél: például

$$a^2 + b^2 = n + k + k + m > n + m = c^2.$$

Így, mivel $(a+b)^2 > a^2 + b^2$, bármely kettő összege is nagyobb, mint a harmadik. Ez azt jelenti, hogy az a, b, c hosszúságú szakaszokból háromszög szerkeszthető és ez az oldalak négyzeteire teljesülő egyenlőtlenségek miatt hegyesszögű.

Írjuk fel erre a háromszögre a koszinusztételt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$$

azaz

$$n + m = n + k + k + m - 2ab \cos \gamma,$$

tehát

$$ab \cos \gamma = k.$$

Mivel a k többszöröse az a -nak és a b -nek, azért a legkisebb közös többszörösükkel, $[a, b]$ -vel is osztható. Másrészt

$$ab = [a, b] \cdot (a, b) = [a, b] \cdot A, \quad \text{így} \quad k = ab \cos \gamma = [a, b] \cdot A \cdot \cos \gamma,$$

tehát $A \cos \gamma$ pozitív egész szám. Láttuk, hogy $A = 1$ vagy 2 és $0^\circ < \gamma < 90^\circ$ miatt $0 < \cos \gamma < 1$, így csak $\cos \gamma = \frac{1}{2}$ lehetséges (és $A = 2$). A γ szög tehát 60° . A szimmetria miatt ekkor az a, b, c oldalú háromszög minden szöge 60° , így $a = b = c$ valóban.

2. A feladat nehéz volt, csak 4 jó megoldást kaptunk. A hibák leggyakoribb oka a következő hibás állítás volt: ha $ab = cd$ és $(a, c) = 1$, akkor $a = d$ és $b = c$. Ez így nyilván nem igaz, hiszen átrendezve $t = \frac{a}{c} = \frac{d}{b}$, a bal oldalon a t tört redukált alakja áll, a jobb oldalon pedig tetszőleges alak. Az $a = d$ és $b = c$ következtetés csak akkor jogos, ha $(a, c) = 1$ mellett a másik két tényező is relatív prím.