

Legyenek az  $ABC$  háromszög oldalai  $a, b$  és  $c$ . Tekintsünk egy olyan gúlát (*1. ábra*), amelynek  $M$  csúcsából kiinduló élei páronként merőlegesek, és az élek hossza rendre

$$MC_1 = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}, \quad MB_1 = \sqrt{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}},$$

$$MA_1 = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}.$$

Ilyen gúla nyilván létezik, hiszen az  $ABC$  háromszög hegyesszögű. Azt fogjuk bizonyítani, hogy ennek a gúlának a hálózata egybevágó a feladatbeli hatszöggel.

Számítsuk ki először az  $A_1B_1C_1$  háromszög oldalait. A Pithagorasz-tétel szerint

$$B_1C_1 = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}} = \sqrt{a^2} = a.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy a másik két oldal  $b$ , illetve  $c$ . Az  $A_1B_1C_1$  háromszög tehát egybevágó az  $ABC$  háromszöggel.

Húzzunk most merőleget  $M$ -ből a  $B_1C_1$ -re, legyen ennek talppontja  $T_1$ . Mivel  $MA_1$  merőleges  $MB_1$  és  $MC_1$ -re, merőleges az  $MB_1C_1$  háromszög síkjára, tehát  $B_1C_1$ -re is. Így  $B_1C_1$  merőleges lesz az  $A_1MT_1$  háromszög síkjára, amiből következik, hogy  $A_1T_1 \perp B_1C_1$ . Ezért, ha az  $MB_1C_1$  lapot az  $a$  oldal körül az  $A_1B_1C_1$  háromszög síkjába forgatjuk,  $M$  képe – ami a *2. ábrán*  $M_1$  – éppen az  $A_1B_1C_1$  háromszög  $A_1$ -ből húzott magasságvonalaának és a  $B_1C_1$  oldal Thalesz-körének (egyik) metszéspontja lesz. Hasonló igaz az  $M_2$  és  $M_3$  pontokra.

A leírtakból következik, hogy a *2. ábrán*  $A_1M_3B_1M_1C_1M_2$  az első ábra gúlájának hálózata.

Gyenes Zoltán (Budapest, Apáczai Cs. J. Gimn., 10. o.t.)

