Legyen a három pont P_1, P_2 és P_3. Ha valamelyik kettő egybeesik, akkor ezek köré ugyanakkora sugarú köröket rajzolva elérhetjük, hogy legyen $2n^2$ olyan pont, amelyen három kör is átmegy. A továbbiakban ezért feltesszük, hogy P_1, P_2 és P_3 különbözőek, valamint P_3 a P_1P_2 szakasz belsejében helyezkedik el.

Legyen $a = P_1P_3$ és $b = P_3P_2$, és vizsgáljuk meg, hogy P_1, P_2, P_3 köré egy r_1, r_2, illetve r_3 sugarú kört rajzolva, a három kör mikor megy át egy ponton. Legyen a P_i körüli r_1 sugarú és a P_2 körüli r_2 sugarú kör metszéspontja Q. Ahhoz, hogy ez a metszéspont létrejöjjön, szükséges és elégséges, hogy teljesüljenek a háromszög-egyenlőtlenségek az r_1, r_2 és $a+b$ számokra.

Tegyük fel, hogy a P_3 körüli, r_3 sugarú kör is átmegy Q-n. Felírva a koszinusztételt a P_1P_3Q és P_2P_3Q háromszögekre,

$$\cos P_1P_3Q\sphericalangle = \frac{a^2+r_3^2-r_1^2}{2ar_3} = -\cos P_2P_3Q\sphericalangle = -\frac{b^2+r_3^2-r_2^2}{2br_3},$$

ami rendezve a

$$b(r_1^2-a^2)+a(r_2^2-b^2)=(a+b)r_3^2 \tag{1}$$

alakba írható.

Legyen $d=\min\left(\frac{a}{n},\ \frac{b}{n}\right)$. Rajzoljuk meg P_1 körül az

$$r_{11}=\sqrt{a^2+ad},\quad r_{12}=\sqrt{a^2+2ad},\quad \ldots,\quad r_{1n}=\sqrt{a^2+nad}$$

sugarú köröket, P_2 körül az

$$r_{21}=\sqrt{b^2+bd},\quad r_{22}=\sqrt{b^2+2bd},\quad \ldots,\quad r_{2n}=\sqrt{b^2+nbd}$$

sugarú köröket, P_3 körül pedig az

$$r_{31}=\sqrt{2\frac{abd}{a+b}},\quad r_{32}=\sqrt{3\frac{abd}{a+b}},\quad \ldots,\quad r_{3n}=\sqrt{(n+1)\frac{abd}{a+b}}$$

sugarú köröket. Ezzel a választással $b(r_1^2-a^2)$ és $a(r_2^2-b^2)$ az abd, $2abd$, …, $nabd$ számokon, $(a+b)r_3^2$ pedig a $2abd$, $3abd$, …, $(n+1)abd$ számokon fut végig.

Az r_{1j}, r_{2j} és $a+b$ számokra mindig teljesülnek a megfelelő háromszög-egyenlőtlenségek, mert

$$a<r_{1j}\le\sqrt{a^2+nad}\le\sqrt{a^2+ab}<a+b$$

és

$$b<r_{2j}\le\sqrt{b^2+nbd}\le\sqrt{b^2+ab}<a+b.$$

Az egy ponton átmenő körhármasoknak a száma tehát megegyezik az $x+y=z$ egyenlet azon megoldásainak számával, amelyekben $x,\ y\in\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ és $z\in\{2,\ 3,\ \ldots,\ n+1\}$. Az ilyen számhármasok száma

$$\sum_{x=1}^{n}(n+1-x)=\frac{n(n+1)}{2}>\frac{n^2}{2}.$$

Mivel minden ilyen számhármashoz két metszéspont tartozik, összesen több, mint n^2 olyan pont van, amelyen három kör megy át. A feladat állítása tehát igaz a $c=1$ választással.

Megjegyzés. Az előbbi konstrukciót módosítva, az

$$r_{3i}=\sqrt{\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+i\right)\frac{abd}{a+b}}\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

választással azoknak a pontoknak a száma, amelyeken három kör megy át, $\frac{3}{2}n^2$ lesz ha n páros, és $\frac{3n^2+1}{2}$ ha n paratlan. Azt is be lehet bizonyítani, hogy ennél több már nem érhető el. A legnagyobb c érték tehát, amivel az állítás igaz, a $\frac{3}{2}$.

Terpai Tamás (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.) dolgozata alapján