

I. megoldás. A képlet szerint a sorozat minden tagja nagyobb az előzőnél, tehát a sorozat pozitív tagú és monoton növekedő.

Szorozzuk be a k -edik tagot $(k-1)$ -gyel, majd a $(k-1)$ -ediket $(k-2)$ -vel ($k > 2$ egész):

$$(1) \quad \begin{aligned} (k-1)a_k &= (k+1)(a_1 + \dots + a_{k-1}) \\ (k-2)a_{k-1} &= k(a_1 + \dots + a_{k-2}). \end{aligned}$$

Itt adjunk mindkét oldalhoz $k \cdot a_{k-1}$ -et:

$$(2) \quad (2k-2)a_{k-1} = k(a_1 + \dots + a_{k-1}).$$

(2)-t eloszthatjuk (1)-gyel (hiszen a_k is, $a_1 + \dots + a_{k-1}$ is pozitív):

$$(3) \quad 2 \cdot \frac{a_{k-1}}{a_k} = \frac{k}{k+1}.$$

(3)-at felírva $k = n, n-1, \dots, 3$ -ra, sőt 2-re is (ami $a_2 = 3a_1$ miatt szintén teljesül), majd összeszorozva kapjuk, hogy

$$2 \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot 2 \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \cdot 2 \frac{a_{n-3}}{a_{n-2}} \cdot \dots \cdot 2 \frac{a_2}{a_3} \cdot 2 \frac{a_1}{a_2} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3},$$

azaz

$$2^{n-1} \frac{a_1}{a_n} = \frac{2}{n+1},$$

tehát $a_n = (n+1)2^{n-2}$, $a_{1998} = 1999 \cdot 2^{1996}$.

II. megoldás. A sorozat első néhány elemét kiszámítva, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 8$, $a_4 = 20$, sejthető, hogy $a_n = (n+1)2^{n-2}$, ha $n \geq 2$. Lássuk ezt be teljes indukcióval. Kiszámolhatjuk, hogy teljesül $n = 2, 3, 4$ -re. Tegyük fel, hogy valamely $n(> 4)$ egészre $a_n = (n+1)2^{n-2}$, és bizonyítsuk be, hogy ekkor $(n+1)$ -re is teljesül, azaz $a_{n+1} = (n+2)2^{n-1}$.

Mivel $a_n = \frac{n+1}{n-1}(a_1 + \dots + a_{n-1}) = (n+1)2^{n-2}$, így $a_1 + \dots + a_{n-1} = (n-1) \cdot 2^{n-2}$, tehát

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n}(a_1 + \dots + a_n) = \frac{n+2}{n}((n-1)2^{n-2} + (n+1)2^{n-2}) = \frac{n+2}{n} \cdot 2 \cdot n \cdot 2^{n-2} = (n+2)2^{n-1},$$

amint azt bizonyítani akartuk.

Deli Lajos (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn., 10. o.t.) megoldásai alapján