

Ha (x, y) egész megoldása a fenti egyenletrendszernek, akkor nyilván $(-x, y)$, $(-x, -y)$ és $(x, -y)$ is megoldásai, tehát feltehetjük, hogy $x > 0$, $y > 0$. Másrészt a két egyenletből nyilvánvaló, hogy $y > x$ és hogy $p > y$, tehát $p > x$ is, azaz $2p > x + y$.

Vonjuk ki eredeti második egyenletünkéből az első:

$$p^2 - p = 2(y^2 - x^2)$$

innen

$$(1) \quad p \cdot \frac{p-1}{2} = (y+x)(y-x).$$

Mivel $p = 2$ esetén nincs a fenti egyenletrendszernek egész megoldása, így p páratlan, tehát $\frac{p-1}{2}$ egész. Mivel p prím, így a jobb oldali szorzat valamelyik tényezőjének osztója kell, hogy legyen.

A p nem lehet osztója $(y-x)$ -nek, hiszen láttuk, hogy $0 < y-x < y < p$. Ezért biztosan $(y+x)$ -nek osztója p , tehát $x+y = k \cdot p$ ($k \geq 1$ egész). A megoldás elején viszont megállapítottuk, hogy $2p > x+y$, így csak $k = 1$ lehet. Tehát $x+y = p$, és így $y-x = \frac{p-1}{2}$ kell, hogy legyen. Ezt a két egyenletet összeadva $2y = p + \frac{p-1}{2}$ -ből $y = \frac{3p-1}{4}$. Ezt a második egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$p^2 + 1 = 2 \cdot \frac{(3p-1)^2}{16},$$

amit átrendezve a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$p^2 - 16p - 7 = 0.$$

Ennek megoldásai $p_1 = 7$, $p_2 = -1$. Közülük a $p = 7$ prím, így csak ebben az esetben van az eredeti egyenletrendszernek egész megoldása ($x = \pm 2$, $y = \pm 5$).

Megjegyzés. Nagyon sok versenyző az (1) egyenlethez eljutva, minden egyéb megfontolás nélkül közölte, hogy ha a bal és a jobb oldalon a szorzatok egyenlők, akkor a kisebbik tényező kisebbikkel, a nagyobb pedig a nagyobbbal lesz egyenlő. Ez azonban egyáltalán nincs így általában egy p prímszám és x, y egészek esetén (pl. $p = 17$, $x = 15$, $y = 19$). Így többen hiába kaptak helyes eredményt, dolgozatukra csak részpontszámot adhattunk.