

I. megoldás. Legyen $a = x + y$, $b = z + x$, $c = y + z$. Ekkor $x + y + z = \frac{a + b + c}{2}$, $x = \frac{-a + b + c}{2}$, $y = \frac{a - b + c}{2}$, $z = \frac{a + b - c}{2}$, a feladat kérdése pedig a következőképpen módosul: milyen m értékek mellett osztható a

$$p(a, b, c) = \left(\frac{-a + b + c}{2}\right)^m + \left(\frac{a - b + c}{2}\right)^m + \left(\frac{a + b - c}{2}\right)^m - \left(\frac{a + b + c}{2}\right)^m$$

polinom abc -vel.

A zárójeleket felbontva, a polinomiális tétel szerint adódik, hogy

$$p(a, b, c) = \frac{1}{2^m} \left[\sum_{p+q+r=m} \frac{m!}{p!q!r!} (-a)^p b^q c^r + \sum_{p+q+r=m} \frac{m!}{p!q!r!} a^p (-b)^q c^r + \sum_{p+q+r=m} \frac{m!}{p!q!r!} a^p b^q (-c)^r - \sum_{p+q+r=m} \frac{m!}{p!q!r!} a^p b^q c^r \right]$$

Ebben a polinomban az abc -vel való oszthatóság szempontjából elég azokat a tagokat tekinteni, ahol a p , q , r kitevők valamelyike 0. Nézzük mondjuk azoknak a tagoknak az összegét, ahol $r = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^m} \left[\sum_{p+q=m} \frac{m!}{p!q!} (-a)^p b^q + \sum_{p+q=m} \frac{m!}{p!q!} a^p (-b)^q + \sum_{p+q=m} \frac{m!}{p!q!} a^p b^q - \sum_{p+q=m} \frac{m!}{p!q!} a^p b^q \right] = \\ = \frac{1}{2^m} \left[\sum_{p+q=m} \frac{m!}{p!q!} (-a)^p b^q + \sum_{p+q=m} \frac{m!}{p!q!} a^p (-b)^q \right]. \end{aligned}$$

A binomiális tétel szerint ez éppen

$$\frac{1}{2^m} [(b - a)^m + (a - b)^m].$$

Hasonló mondható el $p = 0$ és $q = 0$ esetén is. Így azon tagok összege, amelyekben p , q , r valamelyike (legalább egy és legfeljebb kettő) nulla:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^m} [(b - a)^m + (a - b)^m + (c - a)^m + (a - c)^m + (c - b)^m + (b - c)^m] - \\ - \frac{1}{2^m} [(a^m + b^m + c^m) - (a^m + b^m + c^m)]. \end{aligned}$$

Összefoglalva: az $x^m + y^m + z^m - (x + y + z)^m$ polinom akkor és csak akkor osztható az $(x + y)(y + z)(z + x)$ polinommal, ha a

$$(b - a)^m + (a - b)^m + (b - c)^m + (c - b)^m + (a - c)^m + (c - a)^m$$

polinom osztható abc -vel.

Ez végül pontosan akkor teljesül, ha m páratlan.

Megjegyzés. A megoldók többsége szimmetrikus polinomokat használt.

II. megoldás. Felhasználjuk, hogy a háromváltozós polinomok körében (is) teljesül a számelmélet alaptételének megfelelője. Ennek következményeként egy polinom pontosan akkor osztható $(y + z)(z + x)(x + y)$ -nal, ha az $(y + z)$, $(z + x)$, $(x + y)$ tényezők bármelyikével osztható. Ezek ugyanis egymáshoz páronként relatív prímelek, ami azt jelenti, hogy a nemnulla konstans polinomokon kívül nincs más közös osztójuk. A kifejezés szimmetrikus x , y , z -ben, így elegendő pl. az $(x + y)$ -nal való oszthatóságot vizsgálni. Mivel

$$x^m + y^m + z^m - (x + y + z)^m = x^m + y^m - \sum_{i=1}^m \binom{m}{i} (x + y)^i z^{m-i},$$

a kérdés $x^m + y^m$ -nek az $(x + y)$ -nal való oszthatóságára egyszerűsödik. Itt pedig

$$\begin{aligned} x^m + y^m = \\ = (x + y) (x^{m-1} - x^{m-2}y + x^{m-3}y^2 - \dots + (-1)^{m-1}y^{m-1}) + (y^m - (-1)^{m-1}y^m) \end{aligned}$$

mutatja, hogy az oszthatóság akkor következik be, ha $y^m - (-1)^{m-1}y^m = (1 + (-1)^m)y^m$ osztható $(x + y)$ -nal, vagyis ha m páratlan.