

Alakítsuk át a feladat feltételeit:

$$3^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 120^\circ, 4^2 = y^2 + z^2 - 2yz \cos 120^\circ, 5^2 = z^2 + x^2 - 2zx \cos 120^\circ.$$

Ha felvesszünk egy  $ABC$  háromszöget  $AB = 3$ ,  $BC = 4$  és  $AC = 5$  oldalakkal, akkor Pitagorasz tételének megfordítása alapján ez a háromszög derékszögű. Létezik tehát a  $P$  izogonális pontja. ( $P$  akkor és csak akkor izogonális pontja az  $ABC$  háromszögnek, ha  $APB \sphericalangle = BPC \sphericalangle = CPA \sphericalangle = 120^\circ$ .)

Vegyük észre, hogy ha  $AP = x$ ,  $BP = y$  és  $CP = z$ , akkor a három feltétel megegyezik az  $ABP$ ,  $BCP$  és  $CAP$  háromszögekre felírt koszinusztételekkel. Mivel azonos koszinusztételek csak egybevágó háromszögekre írhatók fel, és a fentiekben láttunk a háromszög létezésére egy példát, azért az egyenletrendszer megoldásai:  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$ . Ekkor:

$$\begin{aligned} 6 &= \frac{3 \cdot 4}{2} = T_{ABC} = T_{APB} + T_{BPC} + T_{CPA} = \\ &= \frac{xy \sin 120^\circ}{2} + \frac{yz \sin 120^\circ}{2} + \frac{zx \sin 120^\circ}{2}. \end{aligned}$$

$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  miatt tehát

$$xy + yz + zx = 8\sqrt{3}.$$

*Gyenes Zoltán* (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gimn., 10. o.t.) és *Horváth Gábor* (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján