

A definíció alapján számítsunk ki néhány további értéket:

$$a_4 = \max\{2 \cdot 2\} = 4, a_5 = \max\{2 \cdot 3, 3 \cdot 2\} = 6, a_6 = \max\{2 \cdot 4, 3 \cdot 3, 4 \cdot 2\} = 9, a_7 = \max\{2 \cdot 6, 3 \cdot 4, 4 \cdot 3, 6 \cdot 2\} = 12, a_8 = \max\{$$

... és így tovább. Ezek az eredmények azt sugallják, hogy $n > 1$ esetében $a_{n+3} = 3 \cdot a_n$ teljesül.*⁰

Ezt n -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ esetében a fenti számolások szerint igaz az állítás. Tegyük most fel, hogy az adott összefüggés igaz minden olyan $k < n$ esetén, amelyre $k > 2$.

A sorozat definíciója szerint a_{n+3} az

$$A_{n+3} = \{a_2 \cdot a_{n+1}, a_3 \cdot a_n, \dots, a_{n-2} \cdot a_5, a_{n-1} \cdot a_4, a_n \cdot a_3, a_{n+1} \cdot a_2\}$$

halmazba eső számok maximuma. Az A_{n+3} -ba eső első $n - 3$ szorzat második tényezőjének i indexe rendre $n + 1, n, \dots, 5$. Ezek mindegyike eleget tesz a $4 < i < n + 3$ kikötésnek. Az indukciós feltétel szerint ezekre a szorzatokra $a_d \cdot a_{n+3-d} = 3 \cdot (a_d \cdot a_{n-d})$ teljesül. Ezek a szorzatok pontosan az

$$A_n = \{a_2 \cdot a_{n-2}, a_3 \cdot a_{n-3}, \dots, a_{n-2} \cdot a_2\}$$

halmazba eső szorzatok háromszorosai.

A fennmaradó három szorzat: $\{a_{n-1} \cdot a_4, a_n \cdot a_3, a_{n+1} \cdot a_2\}$. Itt viszont az első tényezők mindegyikének az indexe legalább $6 - 1 = 5$. Ezekre alkalmazható az indukciós feltevés; vagyis ez nem más, mint az $\{a_{n-4} \cdot a_4, a_{n-3} \cdot a_3, a_{n-2} \cdot a_2\}$ szorzatok háromszorosai. Ezek a szorzatok viszont már szerepelnek A_n -ben (hiszen $n > 5$). Ezért az A_{n+3} -ba eső szorzatok pontosan az A_n -be eső szorzatok háromszorosai, azaz $a_{n+3} = 3 \cdot a_n$ valóban igaz.

Mivel $1998 = 3 \cdot 665 + 3$, azért $a_{1998} = 3^{665} \cdot 3 = 3^{666} \approx 579\,102 \cdot 10^{312}$.

Boros M. Mátyás (Budapest, Veres Péter Gimn., 9. o.t.) megoldása alapján

Megjegyzés. Ez a sorozat nem egy „kitalált” képlet. Azok számára, akik valamit hallottak már csoportelméletről, elmondjuk, hogy a_n -re való rekurzió azt mondja meg, hogy miképpen határozhatjuk meg az n -elemű halmaz összes permutációjának csoportjában a maximális méretű kommutatív részcsoport elemszámát; amennyiben ezt kevesebb elemű halmazok esetében már tudjuk.

⁰ Az a_8 kiszámítására azért volt külön szükség, mert 8 a legnagyobb index, amelyre a szorzatok között szerepel 3-mal nem osztható; ami a teljes indukciós bizonyításban esetszétválasztást tenne szükségessé.