

Jelöljük g középpontját O -val, sugarát r -rel, a h_i húr ($i = 1, 2, 3$) végpontját A_i -vel és B_i -vel, felezőpontját F_i -vel, a húrpárok által meghatározott síkokkal a gömbből kimetszett körök középpontjait pedig O_1 , O_2 és O_3 -mal (lásd az ábrát).

Tudjuk, hogy egy kör/gömb húrjának felezőmerőleges egyenese/síkja átmegy a kör/gömb középpontján. Mivel h_1 , h_2 és h_3 páronként egymásra merőlegesek, ezért ebből következik, hogy az $OO_2F_1O_3O_1F_3PF_2$ test téglatest. Ebben OP testátló, tehát

$$(1) \quad OP^2 = OO_1^2 + OO_2^2 + OO_3^2.$$

A feladatban szereplő három kis kör területének összege

$$(2) \quad O_2A_1^2 \cdot \pi + O_3A_2^2\pi + O_1A_3^2\pi.$$

Viszont az OO_i egyenesek merőlegesek e körök síkjaira, ezért Pitagorasz tétele szerint

$$OO_2^2 + O_2A_1^2 = OA_1^2, \quad OO_3^2 + O_3A_2^2 = OA_2^2 \quad \text{és} \quad OO_1^2 + O_1A_3^2 = OA_3^2.$$

Mivel $OA_i = r$, ezért ezekből az egyenletekből és (1)-ből kapjuk, hogy

$$(3) \quad O_2A_1^2 + O_3A_2^2 + O_1A_3^2 = OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2 - (OO_2^2 + OO_3^2 + OO_1^2) = 3r^2 - OP^2.$$

A három kör területösszege (2) és (3) szerint $(3r^2 - OP^2) \cdot \pi$, ami állandó, mert r is és OP is állandó.

Kis-Tóth Ágnes (Kaposvár, Tánicsics M. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

