Az egyenletet rendezve kapjuk, hogy

$$1^n + 2^n + \cdots + x^n = n^n + (n+1)^n + \cdots + (2n-1)^n.$$

Ha $x \le n$, akkor

$$1^n + 2^n + \cdots + x^n < n^n + (n+1)^n + \cdots + (n+x-1)^n \le$$
$$\le n^n + (n+1)^n + \cdots + (2n-1)^n.$$

Másrészt, ha $x \ge 2n-1$, akkor

$$1^n + 2^n + \cdots + x^n > n^n + (n+1)^n + \cdots + x^n \ge n^n + (n+1)^n + \cdots + (2n-1)^n.$$

Mindkét esetben ellentmondásra jutottunk, tehát ha van megoldás, akkor $n < x < 2n-1$.

A $3 > x > 2$ egyenlőtlenségnek nincs egész megoldása, így feltehetjük, hogy $n > 2$.

A kis Fermat-tétel szerint tetszőleges k egészre és n prímre $k^n \equiv k \pmod{n}$, azaz

$$\sum_{j=1}^{x} j^n \equiv \sum_{j=1}^{x} j = \frac{x(x+1)}{2} \pmod{n},$$

továbbá

$$\sum_{j=n}^{2n-1} j^n \equiv \sum_{j=0}^{n-1} j^n \equiv \sum_{j=0}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2} \equiv 0 \pmod{n}.$$

Így x-nek vagy $(x+1)$-nek oszthatónak kell lennie n-nel, hiszen n páratlan prím. Ez viszont nem lehet, mert mint láttuk: $n < x < 2n-1$.

Juhász András (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. o.t.)