

Hajtsuk végre a következő átalakításokat:

$$\begin{aligned}(3a^2 + 32b^2) \cdot 97 &= (3a^2 + 96 \cdot 32b^2) + (96 \cdot 3a^2 + 32b^2) = \\ &= 3(a^2 + 32^2b^2 + 2 \cdot 32ab) + 32(3^2a^2 + b^2 - 2 \cdot 3ab) = 3(a + 32b)^2 + 32(3a - b)^2.\end{aligned}$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

*Megjegyzés.* Mások a  $3(a - 32b)^2 + 32(3a + b)^2$  felbontást alkalmazták. A fenti ötlettel belátható, hogy általában egy  $ka^2 + mb^2$  alakú szám  $(km + x^2)$ -szerese ugyancsak felírható  $ka^2 + mb^2$  alakban. Az is nyilvánvaló, hogy az  $x^2$ -szerese is. Sőt, az alábbi átalakításokkal beláthatjuk, hogy ha  $k$  négyzetszám és osztója  $m$ -nek, akkor a  $(kx^2 + my^2)$ -szerese is: ( $x, y$  tetszőleges pozitív egészek)

$$\begin{aligned}(ka^2 + mb^2)(kx^2 + my^2) &= \\ (k^2a^2x^2 + m^2b^2y^2 + 2kmabxy) + (kma^2y^2 + kmb^2x^2 - 2kmabxy) &= \\ = k \left( \sqrt{k}ax + \frac{m}{\sqrt{k}}by \right)^2 + m \left( \sqrt{k}ay - \sqrt{k}bx \right)^2.\end{aligned}$$

(Az idei Nemzetközi Magyar Matematikaverseny kilencedik évfolyamos feladata volt bizonyítani ezt  $k = 1$  és  $m = 2$ -re.) Nyitott még a kérdés, hogy vajon van-e olyan  $k$  és  $m$ , amelyre létezik megfelelő szorzó, amelyik nem áll elő a fenti három formula egyikével sem (beleszámítva a lehetséges kombinációkat, pl. a  $z^2(km + x^2)$ -szeres számokat is), semmilyen  $x$ -szel és  $y$ -nal.

*Papp Dávid* (Budapest, Szent István Gimn., 10. o.t.)