

Használjuk az *ábra* jelöléseit. Legyen AG az a testátló, ami körül forgatunk, ennek felezőpontja legyen O , a P , Q , R pontok pedig a DC , CB , BF élek felezőpontjai. Az O pontra a kocka középpontosan szimmetrikus, ebben a szimmetriában a P pont P' képe az EF él felezőpontja. Hasonlóan származtathatók a Q' és R' pontok. Megmutatjuk, hogy az AG körüli $+60^\circ$ -os forgatás során P képe Q , Q képe R , R képe P' és így tovább. Először belátjuk, hogy $PO \perp AG$. Ehhez kiszámítjuk a PO , OA és AP szakaszok hosszát: $PO = \frac{1}{2}PP' = \frac{1}{2}ED = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $OA = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $AP = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}}$. Mivel $PO^2 + OA^2 = AP^2$, a Pitagorasz-tétel megfordítása szerint $POA \angle = 90^\circ$.

Hasonlóan belátható, hogy QO és RO is merőleges AG -re. Már láttuk, hogy $PO = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ugyanúgy $QO = PQ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tehát a PQO háromszög szabályos. Most már következik, hogy P képe az AG körüli $+60^\circ$ -os elforgatásban Q . Ugyanígy kapjuk, hogy Q képe R , R képe P' és így tovább.

Nézzük meg azután, mi lesz az $ABCD$ lap elforgatottja. Ennek a lapnak A , P , Q három nem egy egyenesen lévő pontja, ezért a lap síkjának képét a három képpont, vagyis A , Q , R meghatározza. Az A , Q , R pontok síkja lemetszi a kockából az $AQRB$ gúlát. Hasonlóan megmutatható, hogy az A csúcsra illeszkedő másik két lap, illetve a G csúcsra illeszkedő három lap elforgatottja az $AQRB$ gúlával egybevágó gúákat vág le a kockából. Egy ilyen gúla térfogata $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{24}$, ezért a közös rész térfogata $1 - 6 \cdot \frac{1}{24} = \frac{3}{4}$.

Balogh Attila (Szombathely, Nagy Lajos Gimn., 11. o.t.)

Megjegyzés. A közös rész térfogata úgy is kiszámítható, hogy meghatározzuk a

$$PQRP'Q'R'$$

alapú A vagy G csúcsú gúla térfogatát, és ezt kétszer vesszük.

