

a) A csúcsokra felírt számokat jelöljük $a_1, a_2, \dots, a_n$ -nel. Ekkor a bizonyítandó állítás:

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - a_1| \geq 2n - 2.$$

Legyen $a_1 = 1$ és $a_j = n$. Ekkor az ismert $|a + b| \leq |a| + |b|$ alapján

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{j-1} - a_j| \geq |a_1 - a_j| = n - 1(1)|a_j - a_{j+1}| + |a_{j+1} - a_{j+2}| + \dots + |a_n - a_1| \geq |a_j - a_1| = n - 1.(2)$$

Ezt a két egyenlőtlenséget összeadva kapjuk a bizonyítandó állítást.

b) A bizonyítandó egyenlőtlenségben pontosan akkor van egyenlőség, amikor (1)-ben és (2)-ben egyaránt egyenlőség van. Ehhez az kell, hogy (1)-ben (és (2)-ben is) az abszolútértéken belüli különbségek mindegyikének ugyanaz legyen az előjele. Mivel $a_1 = 1$ (tehát a legkisebb szám), azért ebből következik, hogy $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_j$, és mivel $a_j = n$ (a legnagyobb), azért $a_j > a_{j+1} > \dots > a_n$. Tehát

$$a_1 < a_2 < \dots < a_j, \quad a_j > a_{j+1} > a_{j+2} > \dots > a_n.$$

Ha azt eldöntjük, hogy mely számok kerülnek $a_1 = 1$ és $a_j = n$ közé, akkor az egyenlőtlenségek miatt a számokat már csak egyféleképpen helyezhetjük el. Ez 2^{n-2} lehetőség.

Székelyhidi Gábor (Kuwait, New English School, 11. o.t.)

Megjegyzés. A b) kérdésre 2^{n-3} , 2^{n-2} vagy $n \cdot 2^{n-2}$ a válasz attól függően, hogy a tükrözéssel, illetve elforgatással egymásba vihető elrendezéseket megkülönböztetjük-e. Mind a három variációt elfogadtuk.

Megjegyzés. A példát *Hajnal Péter*: Elemi kombinatorikai feladatok (Polygon) c. könyvéből vettük!