

Ismert, hogy egy háromszög ugyanazon csúcsához tartozó belső és külső szögfelező egyenesek merőlegesek egymásra (*ábra*). Ezért Pitagorasz tételéből következik, hogy egy háromszög egyik csúcsából egy másik csúcsához tartozó külső és belső szögfelezőkre bocsátott merőleges szakaszok négyzetének összege megegyezik a két csúcsot összekötő oldal négyzetével. Vagyis a bizonyítandó állításunk

$$6(SA^2 + SB^2 + SC^2) = 2(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

alakba írható.

Legyen $\overrightarrow{SA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{SB} = \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{SC} = \mathbf{c}$. Tudjuk, hogy ekkor $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Ezért $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2 = 0$, azaz

$$(1) \quad \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 = -2(\mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ca}).$$

Másrészt viszont $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, tehát $AB^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{ab}$; és hasonlóképpen $BC^2 = \mathbf{c}^2 + \mathbf{b}^2 - 2\mathbf{bc}$, $CA^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{c}^2 - 2\mathbf{ac}$. Ezeket összeadva:

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 2(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2) - 2(\mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ca}).$$

Vagyis (1)-et felhasználva:

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2) = 3(SA^2 + SB^2 + SC^2).$$

Ezt 2-vel szorozva éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

Székelyhidi Gábor (Kuwait, New English School, 11. o.t.) dolgozata alapján

