A feladatban szereplő $s_i d_i$ szorzatok éppen azon háromszögek területeinek kétszeresei, amely háromszögek egyik csúcsa P, azzal szemközti oldaluk pedig a kiindulási háromszög egyik súlyvonala. Tulajdonképpen azt kell megmutatnunk, hogy e három területet előjelezhetjük úgy, hogy az előjeles összegük 0 legyen.

Jelöljük a P-ből az eredeti háromszög csúcsaiba mutató vektorokat $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$-vel. Ekkor az oldalfelező pontokba mutató vektorok $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$, $\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$ és $\frac{\mathbf{c}+\mathbf{a}}{2}$, s így $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} \times \mathbf{c}$, $\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} \times \mathbf{a}$ és $\frac{\mathbf{c}+\mathbf{a}}{2} \times \mathbf{b}$ olyan egymással párhuzamos vektorok, amelyek hossza valamilyen sorrendben $s_1 d_1$, $s_2 d_2$ és $s_3 d_3$. Mivel bármilyen $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorokra igaz, hogy $\mathbf{x} \times \mathbf{y} + \mathbf{y} \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$, ezért

$$\left(\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} \times \mathbf{c}\right) + \left(\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} \times \mathbf{a}\right) + \left(\frac{\mathbf{c}+\mathbf{a}}{2} \times \mathbf{b}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

Ez viszont éppen azt jelenti, hogy az $s_1 d_1$, $s_2 d_2$ és $s_3 d_3$ szorzatok közül a legnagyobb egyenlő a másik kettő összegével.

Naszódi Gergely (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

