

I. megoldás. Jelöljük az AEF háromszög köré írható kör középpontját O -val, az E pont O -ra vonatkozó tükörképét pedig D -vel (1. ábra). Ekkor Thalész tétele miatt $EFD \sphericalangle = 90^\circ$, vagyis a B pont FD egyenesre vonatkozó tükörképe C , tehát $CD = DB$. Felhasználva a kerületi szögek tételét és azt, hogy AE szögfelező a CAB háromszögben, kapjuk, hogy

$$(1) \quad C_1DE \sphericalangle = C_1AE \sphericalangle = EAB_1 \sphericalangle = EDB_1 \sphericalangle.$$

Mivel ED átmérője a körnek, azért $C_1D = B_1D$.

Forgassuk el az AC egyenest D körül $CAB \sphericalangle$ -gel. Az (1) szögegyenlőségekből következik, hogy $C_1DB_1 \sphericalangle = CAB \sphericalangle$, s így $C_1D = B_1D$ miatt C_1 képe a forgatásnál B_1 lesz, az AC egyenes képe pedig az AB egyenes. Mivel $CD = BD$ és az $ABD \sphericalangle$ is, valamint az $ACD \sphericalangle$ is hegyesszög, azért C képe a forgatásnál csak B lehet. Ez viszont azt jelenti, hogy a forgatásnál a C_1C szakasz képe B_1B , tehát felhasználva, hogy a forgatás egybevágósági transzformáció, kapjuk, hogy $BB_1 = CC_1$.

Pap Júlia

(Debrecen, Fazekas M. Gimn., 11. o.t.)

II. megoldás.

Jelöljük az ABC háromszög oldalait a szokásos módon a, b, c -vel, az AEF háromszög köré írt kört pedig k -val. F a BC oldal felezőpontja, ezért

$$CF = BF = \frac{a}{2}.$$

A szögfelezőtétel szerint $\frac{CE}{EB} = \frac{b}{c}$, továbbá $CE + EB = a$. Így

$$CE = \frac{b \cdot a}{b + c} \quad \text{és} \quad BE = \frac{c \cdot a}{b + c}.$$

A C pont k -ra vonatkozó hatványát kétféleképpen felírva:

$$CC_1 \cdot CA = CE \cdot CF, \quad \text{amiből} \quad CC_1 = \frac{CE \cdot CF}{CA} = \frac{\frac{b \cdot a}{b+c} \cdot \frac{a}{2}}{b} = \frac{a^2}{2(b+c)}.$$

A B pont k -ra vonatkozó hatványát hasonlóan felírva:

$$BB_1 \cdot BA = BF \cdot BE, \quad \text{amiből} \quad BB_1 = \frac{BF \cdot BE}{BA} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{c \cdot a}{b+c}}{c} = \frac{a^2}{2(b+c)}.$$

Ezzel megmutattuk, hogy $BB_1 = CC_1 = \frac{a^2}{2(b+c)}$.

