

A bizonyítandó egyenlőtlenségben szereplő kifejezéseknek geometriai jelentést tulajdonítunk, s így látjuk be, hogy egyenlők.

Írjunk az egység sugarú körbe egy szabályos n -szöget, és jelöljük a csúcsait $A_1, A_2, \dots, A_n$ -nel, a kör középpontját pedig O -val. Osszuk fel a sokszöget háromszögekre kétféleképpen: előbb O -t kössük össze a sokszög minden csúcsával (*1. ábra*), másodszor pedig A_1 -et kössük össze a sokszög többi csúcsával (*2. ábra*). Ekkor $A_iOA_{i+1} \sphericalangle = \frac{2\pi}{n}$ és $A_iA_1A_{i+1} \sphericalangle = \frac{\pi}{n}$, mert az A_iA_{i+1} ívek egyenlők ($i = 1, 2, \dots, n$; A_{n+1} azonos A_1 -gyel), valamely ívhez tartozó kerületi szög pedig fele a megfelelő középponti szögnek.

A sokszög területe mindkét felbontás esetén megegyezik a felbontásban szereplő háromszögek területeinek összegével. Tudjuk, hogy egy háromszög területét megkapjuk, ha két oldala szorzatának felét megszorozzuk az oldalak által bezárt szög szinuszával. Így az első felbontás esetén $T_{A_iOA_{i+1}} = \frac{1 \cdot 1}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$, azaz a sokszög területe:

$$T = T_{A_1OA_2} + T_{A_2OA_3} + \dots + T_{A_nOA_1} = n \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{n} = n \frac{1}{2} \sin 2\alpha = n \sin \alpha \cos \alpha.$$

A második felbontásban szereplő háromszögek oldalait az A_1OA_i egyenlő szárú háromszögből határozhatjuk meg. Ennek a háromszögnek a szárszöge $(i-1)\frac{2\pi}{n}$, ha $i \leq \frac{n}{2}$, illetve $2\pi - (i-1)\frac{2\pi}{n}$, ha $i > \frac{n}{2}$ (*3. ábra*). Ezért mindkét esetben igaz, hogy

$$A_1A_i = 2 \cdot \sin(i-1)\alpha = 2 \sin \frac{(i-1)2\pi}{n} = 2 \sin \frac{2\pi - (i-1)2\pi}{n}.$$

Tehát a sokszög területe:

$$T = T_{A_2A_1A_3} + T_{A_3A_1A_4} + \dots + T_{A_{n-1}A_1A_n} = \frac{1}{2}(2 \sin \alpha \cdot 2 \sin 2\alpha) \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2}(2 \sin 2\alpha \cdot 2 \sin 3\alpha) \cdot \sin \alpha + \dots + \frac{1}{2}(2 \sin(n-2)\alpha \cdot 2 \sin \alpha) \cdot \sin \alpha.$$

A kétféleképpen számolt területnek meg kell egyeznie. Az így kapott egyenlőség mindkét oldalát $2 \sin \alpha$ -val osztva éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

Vizer Máté (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

