

Két esetet különböztetünk meg:

- a) ha n páros,
- b) ha n páratlan.

a) Írjuk fel az egész számokat növekvő sorrendben, majd írjuk alá fordított sorrendben, és képezzük az egymás alá írt számok különbségét:

növekvő sorrend	1	2	3	...	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2} + 1$	...	$n - 1$	n
fordított sorrend	n	$n - 1$		...	$\frac{n}{2} + 1$	$\frac{n}{2}$	...	2	1
különbség	$1 - n$	$3 - n$	$5 - n$		1	1		$n - 3$	$n - 1$

A különbségek $\frac{n}{2}$ -ig negatívak, de abszolút értékben megegyeznek az $\frac{n}{2} + 1$ -től n -ig vett különbségekkel, ezért elegendő $\frac{n}{2}$ -ig összegezni, és ennek kétszeresét venni. A különbségek számtani sorozatot alkotnak, amelyben $a_1 = |1 - n| = n - 1$, $d = -2$, a tagok száma: $\frac{n}{2}$ és $a_1 = 1$. A sorozat összege az ismert képlet szerint így írható fel:

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2}(n - 1 + 1) = \frac{n^2}{4}.$$

A keresett összeg pedig: $\frac{n^2}{2}$.

b) Ha n páratlan, az előzőkhöz hasonlóan

növekvő sorrend	1	2	3	...	$k - 1$	k	$k + 1$	...	$n - 1$	n
fordított sorrend	n	$n - 1$		...	$k + 1$	k	$k - 1$	...	2	1
különbség	$1 - n$	$3 - n$	$5 - n$		-2	0	2		$n - 3$	$n - 1$

Most a számtani sorozatban a tagok száma változott, mégpedig $k = \frac{n + 1}{2}$ -re, és az utolsó tag $a_n = 0$.

Az összeg: $S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{n + 1}{2}(n - 1) = \frac{n^2 - 1}{4}$. A különbségek összege: $\frac{n^2 - 1}{2}$.

Markó József (Miskolc, Földes F. Gimn., 9. o.t.)