

Jelöljük a háromszög területét T -vel. Tudjuk, hogy $2T = am_a = bm_b = cm_c$, azaz $m_a = \frac{2T}{a}$, $m_b = \frac{2T}{b}$ és $m_c = \frac{2T}{c}$. Ezeket a bizonyítandó egyenlőtlenségbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\frac{a^4}{4T^2} + \frac{b^4}{4T^2} + \frac{c^4}{4T^2} \geq 4, \quad \text{azaz} \quad a^4 + b^4 + c^4 \geq 16T^2.$$

A Héron-képlet szerint $16T^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$, vagyis a bizonyítandó egyenlőség:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

A jobb oldalon elvégezve a szorzásokat, majd rendezve az egyenlőtlenséget:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq [(b+c)^2 - a^2] [a^2 - (b-c)^2], \quad a^4 + b^4 + c^4 \geq -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2,$$

$$2a^4 + 2b^4 + 2c^2 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 \geq 0, \quad (a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \geq 0.$$

Az utolsó egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül, s mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, a bizonyítandó egyenlőség is igaz. Az is látszik, hogy egyenlőség pontosan akkor van, ha $a = b = c$, azaz ha a háromszög szabályos.

Deme Gábor (Nagykanizsa, Battyhány L. Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján