I. megoldás.

$$1997 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{1995 \text{ db}},$$

így a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján

$$\frac{1997}{1999} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 + \dots + 1}{1999} \geq \sqrt[1999]{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1} = \sqrt[1999]{\frac{1}{16}}.$$

Ebből

$$\left(\frac{1997}{1999}\right)^{1999} \geq \frac{1}{16},$$

azaz

$$1997^{1999} \geq 1999^{1999} \cdot \frac{1}{16} \geq 1999^{1997} \cdot \frac{1999^2}{16}.$$

Mivel $\frac{1999^2}{16} > 1$, így $1997^{1999} > 1999^{1997}$.

Tarcsi Károly (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 10. o.t.)

II. megoldás. Bebizonyítjuk, hogy $(n+2)^n < n^{n+2}$ minden $n \geq 3$ természetes számra. Ehhez elég az ezzel ekvivalens $\sqrt[n+2]{n+2} < \sqrt[n]{n}$ egyenlőtlenséget belátni, azaz elég megmutatni, hogy az $\{\sqrt[n]{n}\}$ sorozat $n = 3$-tól kezdve szigorúan monoton fogyó. Azt kell tehát megmutatnunk, hogy $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$, vagyis

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n. \tag{1}$$

Teljes indukcióval bizonyítunk: $n = 3$-ra (1) valóban teljesül, mert $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} < 3$. Legyen most $n \geq 3$, és tegyük fel, hogy (1) fennáll. Bebizonyítjuk, hogy ekkor teljesül $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < n+1$ is. Valóban,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) < \\ &< \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) < \frac{n(n+2)}{n+1} < n+1. \end{aligned}$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük, tehát valóban igaz, hogy $(n+2)^n < n^{n+2}$, és így $1999^{1997} < 1997^{1999}$.

Kovács Erika Renáta (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn., 8. o.t.)

III. megoldás. Számoljuk ki, hogy melyik szám hány számjegyből áll. Tetszőleges pozitív egész x szám $[\lg x + 1]$ jegyű.

$$\begin{aligned} \left[\lg 1997^{1999} + 1\right] &= [1999 \cdot \lg 1997 + 1] = 6598 \\ \left[\lg 1999^{1997} + 1\right] &= [1997 \cdot \lg 1999 + 1] = 6592. \end{aligned}$$

Tehát 1997^{1999} több jegyű, mint 1999^{1997}, így biztosan nagyobb nála.

Máthé András (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gimn., 10. o.t.)