

I. megoldás. Tekintsük az O , O_1 és M_1 pontok merőleges vetületeit az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalaira. Elegendő azt megmutatni, hogy az ezek közti szakaszok aránya két különböző oldalon megegyező. Határozzuk meg ezt az arányt pl. a B_1C_1 oldalon. F -fel jelölve az ABC háromszög köré írt kör A -t nem tartalmazó BC ívének felezőpontját, ezen átmeny az O -ból a BC oldalra emelt merőleges is és az A -ból induló szögfelező is. Jelöljük a köztük levő szöveget δ -val (2. ábra). Az O_1A_1 érintési sugár szintén merőleges a BC oldalra.

O , O_1 és M_1 merőleges vetületét a B_1C_1 oldalon jelöljük O' , O'_1 és M'_1 -vel. Az AB_1C_1 háromszög egyenlő szárú, ezért O'_1AF -en van, tehát A_1M_1 párhuzamos AF -fel, és így $O_1A_1M_1 \sphericalangle = \delta$. Az O -ból AF -re és O_1 -ből $A_1M'_1$ -re emelt merőleges szakaszok egyrészt az $O'O'_1$, illetőleg $O'_1M'_1$ szakasszal egyenlők, másrészt hosszuk $R \sin \delta$, illetőleg $r \sin \delta$, ahol R a háromszög köré írt kör sugara, r a beírt köré. Így

$$O'O'_1 : O'_1M'_1 = (R \sin \delta) : (r \sin \delta) = R : r.$$

Ez az arány azonban csak a két kör adataitól függ, a B_1C_1 oldaltól nem, így ugyanez az arány adódik a másik két oldalon levő vetületek közti szakaszokra is. Ezzel a feladat állítása bizonyítást nyert.

II. megoldás. A megoldáshoz felhasználunk a háromszögekre vonatkozó néhány összefüggést, amelyeket a megoldás végén bizonyítunk.

Jelöljük az $A_1B_1C_1$ háromszög csúsaiból húzott magasságok talppontját rendre A_2 , B_2 , C_2 -vel (3. ábra).

a) Egy háromszög magasságai felezik a talpponti háromszög szögeit, így a magasságpont a talpponti háromszögbe írt kör középpontja, esetünkben M_1 az $A_2B_2C_2$ -be írté.

b) Ismeretes, hogy a háromszög (esetünkben az $A_1B_1C_1$ háromszög) köré írt körnek a csúcsokhoz mutató sugarai merőlegesek a talpponti háromszög oldalaira. Esetünkben O_1A_1 , O_1B_1 , O_1C_1 érintési sugár is, tehát merőleges rendre a BC , CA , AB oldalra is, tehát az ABC és az $A_2B_2C_2$ háromszög oldalai párhuzamosak.

c) A két háromszög hasonló helyzetű is, s így rájuk vonatkozóan megfelelő pontpárok összekötő egyenesei is párhuzamosak.

d) Az $A_2B_2C_2$ háromszög köré írt kör az $A_1B_1C_1$ háromszög ún. Feuerbach-köre, ez átmeny az oldalak felezőpontjain is, és középpontja az O_1M_1 szakasz F_0 felezőpontja.

Az ABC háromszögre vonatkozóan O és O_1 megfelelői az $A_2B_2C_2$ -re vonatkozóan F_0 és M_1 , így összekötő egyenesük párhuzamosak. A két egyenesnek azonban O_1 közös pontja, így O , O_1 és M_1 egy egyenesen van, és ezt kellett bizonyítani.

Bebizonyítjuk a felhasznált összefüggéseket.

a) Jelöljük az ABC háromszög egymás utáni csúsaiból húzott magasságainak talppontját T_a , T_b , T_c -vel (4. ábra). Az ABT_aT_b és az ACT_aT_c négyszög húrnégyszög, így $T_cT_aB \sphericalangle = CAB \sphericalangle$ és $T_bT_aC \sphericalangle = BAC \sphericalangle$, tehát AT_a szögfelező.

b) Az ABC háromszög köré írt O középpontú körben az $AOB \sphericalangle$ mint középponti szög az $ACB \sphericalangle$ kétszerese (5. ábra). Szögfelezője merőleges AB -re, és $ACB \sphericalangle$ nagyságú szöveget zár be vele. A C pontból húzott magasság T_c talppontjából állítsunk merőlegest OA -ra, messe ez a CA oldal egyenesét a T^* pontban. Ekkor $AT_cT^* \sphericalangle$ mint merőleges szárú szög ugyancsak $ACB \sphericalangle$ nagyságú, tehát BCT^*T_c húrnégyszög, benne a BC oldal T_c -ből derékszögben látszik, tehát T^* -ből is, vagyis T^* a B -ből húzott magasság talppontja, T_b .

c) Azt kell belátnunk, hogy ha az ABC és az $A_2B_2C_2$ háromszög megfelelő oldalai párhuzamosak, akkor AA_2 , BB_2 és CC_2 egy ponton megy keresztül, vagy párhuzamosak (6. ábra). Ha pl. AA_2 és BB_2 metszi egymást egy T pontban, akkor ABT és A_2B_2T hasonló háromszögek, így $AT : A_2T = AB : A_2B_2 = BT : B_2T$. Másrészt $AB : A_2B_2 = BC : B_2C_2$. Ekkor azonban a BCT és a B_2C_2T háromszög is hasonló, mert egy szögük és az azt közrefogó oldalak aránya egyenlő. Ebből viszont következik, hogy C , C_2 és T is egy egyenesen van.

d) A Feuerbach-körre vonatkozó állítások igazolására jelöljük a BC , CA , AB oldalak felezőpontjait rendre F_a , F_b , F_c -vel (7. ábra). Az A csúcs tükröképe az F_bF_c középvonalra a T_a magasságtalppont. F_aF_c mint középvonal F_bA -val egyenlő és párhuzamos, a tükrözés folytán pedig F_bT_a -val egyenlő. Így $F_aT_aF_bF_c$ szimmetrikus trapéz (lehet hurkolt, esetleg egyenlő szárú háromszög). Így kör írható köré, amelynek középpontja az F_aT_a szakasz felezőmerőlegesén van, az pedig felezi az O és az M magasságpont közti szakaszt.

A kör átmeny mind a három oldal felezőpontján, így a gondolatot a másik két oldalra megismételve, ugyanaz a kör adódik, sőt, azt is kapjuk, hogy a kör középpontja az OM szakasz F_0 felezőpontja. Az oldafelezőpontok és a magasságtalppontok közül bármelyik 3 különböző már meghatározza a kört.



